TESIS DE MAESTRÍA

C^*-álgebras asociadas a sistemas dinámicos irreversibles.

Eusebio Gardella

Orientador: Fernando Abadie

1 de setiembre de 2010
Montevideo
Uruguay

Maestría en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Resumen

Este trabajo está dedicado al estudio del producto cruzado de una C^*-álgebra unital por un endomorfismo de acuerdo con la definición introducida por Ruy Exel. Dos características que distinguen esta construcción de otras similares son, por un lado, el hecho de no imponer condiciones sobre el endomorfismo, y por otro, la introducción de un operador de transferencia que desempeña el papel de "inversa" del endomorfismo en cuestión. Uno de los principales resultados aquí presentados es la identificación de este producto cruzado con el álgebra de Cuntz-Pimsner relativa (de acuerdo a la definición de Muhly y Solel) determinada por una correspondencia que está naturalmente asociada al endomorfismo. Posteriormente se estudian algunos ejemplos concretos de esta construcción y se la compara con otras nociones existentes del producto cruzado por un endomorfismo. Finalmente, se estudia en detalle esta construcción en el caso de álgebras conmutativas. Cuando el endomorfismo está inducido por un mapa de recubrimiento en un espacio compacto, se muestra cómo varias propiedades de su dinámica topológica se traducen en propiedades algebraico-analíticas del producto cruzado que él determina.

Abstract

The present work is dedicated to the study of the crossed product of a C^*-algebra by an endomorphism, according with the definition introduced by Ruy Exel. Two characteristics that distinguish this construction from other similar ones are, on the one hand, the fact that there are no conditions imposed to the endomorphism, and on the other hand, the introduction of a transfer operator that plays the role of the "inverse" of the endomorphism under consideration. One of the main results here presented is the identification of this crossed product with the relative Cuntz-Pimsner algebra (according to Muhly and Solel's definition) determined by a correspondence that is naturally associated to the endomorphism. Later, some concrete examples of this construction are studied and it is compared with other existent notions of the crossed product by an endomorphism. Finally, this construction is studied in detail in the case of a commutative algebra. When the endomorphism is induced by a covering map of a compact space, it is shown how several properties of its topological dynamics are translated into algebraic-analytic properties of the crossed product that it determines.

Para mi mamá.

No alcanzan estas palabras para agradecerles como se merecen, pero hago el intento.

A mi madre, por ayudarme en todo y apoyarme en cada paso que doy. No estaría acá si ella no creyera en mí.
A Fernando, por confiar tanto en mí y porque es mi referente.
A Juampi, por ser sincero conmigo y porque me ayudó en lo que más me ha costado: estar bien.
A Paula, por haber estado ahí en los momentos en que más la necesité. Me conoce más que yo mismo y tiene siempre las palabras justas.
A Pao y Flo, porque a pesar de saber todo de mí me siguen queriendo! A Pao por ser transparente y a Flo por su humor.
A Victoria, por perdonarme por todas las veces que no contesté sus llamadas y mensajes, pero sobre todo por apoyarme en mis locuras y alentarme siempre.
A Iván, por ser el mejor compañero y haberme enseñado tanto.

Gracias.

Índice general

Introducción

Casi la totalidad de las interacciones entre la teoría de las álgebras de operadores y los sistemas dinámicos surgen a partir de una construcción usualmente conocida como *producto cruzado*. La idea básica, que fue usada por primera vez por von Neumann en 1936 en el contexto de automorfismos de espacios de medida, consiste en adjuntar un álgebra de operadores a un sistema dinámico, cuya estructura algebraica pretende reflejar las propiedades dinámicas del sistema dado. El caso de C^*-álgebras y sistemas dinámicos topológicos, en comparación con las álgebras de von Neumann y los espacios de medida en la construcción pionera de von Neumann, fue introducido posteriormente por Gelfand, Naimark y Fomin.

Sin dudas los mayores avances en este campo se han obtenido para sistemas *reversibles*, es decir, cuando la dinámica queda determinada por un grupo de transformaciones invertibles. Esta teoría cuenta hoy con varios resultados importantes, convirtiéndose en una rama de las Álgebras de Operadores muy popular y difundida. Sin embargo, se han hecho varios esfuerzos por extender estos avances a sistemas dinámicos *irreversibles*, dando lugar al surgimiento de una importante teoría que intenta establecer un paralelismo con la teoría clásica de sistemas dinámicos.

Desde fines de la década de los setentas, con la aparición de algunos trabajos de Cuntz como [7], varios autores como Paschke, el propio Cuntz, Murphy, Doplicher y Roberts, entre otros, han propuesto teorías generales sobre productos cruzados de C^*-álgebras por endomorfismos (tanto en el caso de un único endomorfismo como de un semigrupo de ellos). En general estas teorías fueron desarrolladas asumiendo ciertas hipótesis sobre el endomorfismo, como por ejemplo inyectividad o rango hereditario.

En efecto, motivado por el grupoide de Cuntz introducido por Renault, en 1995 Deaconu introdujo una construcción del producto cruzado por un endomorfismo que puede ser aplicada en ciertas situaciones en las que el endomorfismo preserva la unidad y por lo tanto no tiene en general rango hereditario. Una posterior generalización hecha en colaboración con Muhly en 1999 fue diseñada para poder aplicarse a los endomorfismos inyectivos de C^*-álgebras conmutativas, requiriendo determinadas propiedades topológicas especiales del mapa en el espectro (a saber, que sea un mapa de recubrimiento), que son difíciles de establecer en el caso no conmutativo.

En [9], Exel propone una nueva definición del producto cruzado de un álgebra por un endomorfismo, que se aplica en condiciones totalmente generales, sin necesidad de suponer hipótesis sobre el endomorfismo. Esta construcción coincide con las construcciones previas en las situaciones particulares en las que ellas están definidas, y proporciona resultados naturales en situaciones más generales.

La construcción clásica del producto cruzado de una C^*-álgebra A por un grupo de automorfismos, depende de una acción de un grupo localmente compacto y de Hausdorff G, y un homomorfismo continuo $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(A)$, que se concibe como la acción de G por automorfismos de A. Cuando el grupo G es el grupo de los enteros $\mathbb{Z}$, tener un homomorfismo como antes es equivalente a tener un automorfismo del álgebra: las correspondencias

$$\begin{array}{rcl} \alpha : \mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(A) & \mapsto & \alpha(1) \in \mathrm{Aut}(A) \qquad \text{y} \\ \alpha \in \mathrm{Aut}(A) & \mapsto & \widetilde{\alpha} : \mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(A), \text{ dado por } \widetilde{\alpha}(n) = \alpha^n \end{array}$$

son inversas entre sí.

Sean α un automorfismo de A, y $\widetilde{\alpha}$ la acción que él induce. Un par covariante de $(A, \mathbb{Z}, \widetilde{\alpha})$ en una C^*-álgebra B es un par (π, U) donde $\pi : A \to B$ es un homomorfismo y $u : \mathbb{Z} \to \mathcal{U}(B)$ es una representación unitaria de $\mathbb{Z}$, que satisfacen

$$u_n \pi(a) u_n^* = \pi(\widetilde{\alpha}_n(a)),$$

para todo a en A. Como se tiene que $u_n = (u_1)^n$, es claro que los pares covariantes de $(A, \mathbb{Z}, \widetilde{\alpha})$ están en biyección con los pares (π, U) donde $\pi : A \to B$ es un homomorfismo y U es un elemento unitario de B, que satisfacen $U\pi(a)U^* = \pi(\alpha(a))$ para todo a en A.

Puede verse que en esta situación, $A \rtimes_{\widetilde{\alpha}} \mathbb{Z}$ es (isomorfa a) la C^*-álgebra universal generada por una copia de A y un elemento unitario u sujetos a las relaciones

$$uau^* = \alpha(a) \quad \text{para todo } a \in A.$$

En el producto cruzado, el automorfismo α queda codificado como la conjugación por un elemento unitario universal: el automorfismo del álgebra se transforma en un automorfismo *interno* del producto cruzado, que es la "mínima" álgebra en donde esto ocurre.

En este trabajo estudiaremos la definición del producto cruzado por un endomorfismo introducida por Exel en [9].

Comenzamos con una motivación para su construcción.

Cuando el sistema es irreversible, nos proponemos codificar la acción del endomorfismo a través de alguna identidad algebraica en (lo que quisiéramos que fuera) el producto cruzado. Una relación que fue recurrentemente planteada como aquella que codifique al endomorfismo es

$$\alpha(a) = SaS^* \quad \text{para todo } a \in A,$$

donde además se exige que S sea una isometría. Esta elección tiene serias deventajas, entre las cuales destacamos que sólo endomorfismos de rango hereditario pueden ser implementados de esta forma. La relación que tomaremos en este trabajo como codificadora del endomorfismo será

$$Sa = \alpha(a)S,$$

pero no exigiremos de antemano que S sea una isometría, ni siquiera una isometría parcial. Es claro que en el caso de un automorfismo, la identidad que define un par covariante es equivalente a que $ua = \alpha(a)u$, de modo que en estos casos, la relación propuesta coincide con la que define los productos cruzados por automorfismos.

La construcción del producto cruzado de Exel tendrá como ingredientes una C^*-álgebra unital A y un endomorfismo $\alpha : A \to A$. No asumieremos que α preserva la unidad ni que es inyectivo. La imposibilidad de invertir α nos lleva al otro ingrediente esencial: un *operador de transferencia*, que jugará el rol de "inversa" de α.

Para motivar la definición de los operadores de transferencia, consideramos primero el caso clásico: un sistema dinámico (topológico) irreversible.

Sean X un espacio compacto y de Hausdorff, y $\sigma : X \to X$ un mapa de recubrimiento, es decir, una función continua, sobreyectiva que es un homeomorfismo local. En este contexto, $|\sigma^{-1}(x)|$ es no nulo y finito para todo x de X. Asociado al mapa σ hay un endomorfismo de la C^*-álgebra unital $A = C(X)$: el endomorfismo dual de σ, $\alpha = \sigma^*$, que está dado por $\alpha(f) = f \circ \sigma$, para toda f en $C(X)$. Además, es un endomorfismo inyectivo, puesto que σ es sobreyectivo. En este contexto, es fácil ver que si $\mathcal{L} : C(X) \to C(X)$ es el operador lineal y positivo dado por

$$\mathcal{L}(f)(x) = \frac{1}{|\sigma^{-1}(x)|} \sum_{\{y \in X : \sigma(y) = x\}} f(y),$$

entonces $\mathcal{L}$ es una inversa a izquierda de α, es decir, $\mathcal{L} \circ \alpha = id_{C(X)}$. En efecto, si $f \in C(X)$ y $x \in X$,

$$\mathcal{L} \circ \alpha(f)(x) \quad = \quad \mathcal{L}(f \circ \sigma)(x) = \mathcal{L}(f \circ \sigma)(x) \frac{1}{|\sigma^{-1}(x)|} \sum_{\{y \in X : \sigma(y) = x\}} f(\sigma(y)) = f(x).$$

Análogamente deducimos que $\mathcal{L}(\alpha(f)g) = f\mathcal{L}(g)$ para todas $f, g \in C(X)$. Observemos que la función $\mathcal{L}(f)$ representa el valor esperado del elemento observable f, una unidad de tiempo hacia el pasado.

En contextos más generales, como por ejemplo cuando σ no es sobreyectivo, no podemos esperar que exista algún operador $\mathcal{L}$ que satisfaga $\mathcal{L} \circ \alpha = id_{C(X)}$. Sin embargo, nos concentramos en la identidad $\mathcal{L}(\alpha(f)g) = f\mathcal{L}(g)$, que es similar a la primera pero mucho menos exigente; tanto que siempre existe algún operador de transferencia $\mathcal{L}$ que la satisfaga.

Volviendo al caso no conmutativo, definimos un operador de transferencia para el par (A, α) como siendo un mapa lineal y positivo de A en sí misma que satisface $\mathcal{L}(\alpha(a)b) = a\mathcal{L}(b)$ para todos a, b en A.

La idea de incluir un operador de transferencia en la construcción del producto cruzado viene del hecho de que casi todos los ejemplos de productos cruzados de un álgebra A por un endomorfismo α, resultan en un álgebra B que contiene a A como subálgebra, así como a un elemento S que satisface $S^*AS \subseteq A$. Como esto ocurre dentro de A y no en el producto cruzado propiamente, uno debería definir de antemano cuál debería ser el mapa $a \mapsto S^*aS : A \to A$. A este mapa lo denotamos por $\mathcal{L}$ y le llamamos operador de transferencia, imponiéndole además que cumpla la identidad que mencionamos más arriba. Observemos que $a \mapsto S^*aS$ es necesariamente lineal y positivo, sin importar si S es una isometría o no.

Sean A, α y $\mathcal{L}$ como en los párrafos anteriores. Como un primer paso hacia la construcción del producto cruzado, podemos considerar el álgebra universal generada por (una copia de) A y un elemento S sujetos a las relaciones

$$\begin{aligned} Sa &= \alpha(a)S \quad \text{y} \\ S^*aS &= \mathcal{L}(a), \end{aligned}$$

que denotamos por $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$.

El lector notará inmediatamente que estas relaciones son totalmente asimétricas con respecto a S. Por ejemplo, no existe, a priori, ninguna forma de transformar una expresión del tipo aS, pero sí para Sa. La razón de esta asimetría en las relaciones que involucran a S es el hecho de que en general, la *evolución del tiempo* en los sistemas dinámicos que estamos considerando es irreversible. En efecto, mientras el endomorfismo α puede interpretarse como el determinante de la evolución hacia el futuro del sistema bajo estudio, el operador de transferencia debe ser entendido como quien brinda información sobre el pasado. En el caso de los sistemas irreversibles, es decir, cuando α no es invertible, es de esperar que la evolución del tiempo se comporte de forma muy diferente dependiendo si estamos considerando el futuro o el pasado.

En el caso en que α es un automorfismo y elegimos $\mathcal{L}$ como siendo su inversa, el álgebra $\mathcal{T}(A, \alpha, \alpha^{-1})$ no es el producto cruzado $A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$: este último es un cociente de ella. Por lo tanto, resulta evidente que el producto cruzado de A por el endomorfismo α no debería ser $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ sino un cociente. Como los cocientes de las álgebras universales usualmente surgen de introducir nuevas restricciones, debemos introducir más de ellas para obtener una definición satisfactoria del producto cruzado.

Sea $M = AS$, el subespacio cerrado de $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ generado por los elementos de la forma aS con a en A. Usando las propiedades que definen al elemento S, es fácil verificar que $AM \subseteq M$ y $MM^*M \subseteq M$. Por lo tanto, M es invariante por la multiplicación a izquierda por elementos tanto de A como de MM^*. Así, podría ocurrir que para ciertos a en A y k en MM^*, los operadores de multiplicación a izquierda en M por a y k coincidan, esto es, que para todo b en A se cumpla

$$abS = kbS.$$

Si este el caso, llamamos al par (a, k) una *redundancia*.

Siguiendo las ideas de Pimsner, debemos "eliminar" las redundancias, es decir, cocientar $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ por el ideal bilateral cerrado generado por las diferencias $a - k$, donde (a, k) es una redundancia. Sin embargo, mirando algunos ejemplos concretos, resulta que eliminar *todas* las redundancias parece ser demasiado drástico. Estos mismos ejemplos sugieren que las redundancias a eliminar son aquellas para las cuales el elemento a está en el ideal generado por la imagen de α.

Eliminar estas redundancias equivale a agregar una relación a las que definen el álgebra $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$: cada vez que un par $(a, k) \in A\alpha(A)A \times MM^*$ satisface $abS = kbS$ para todo b en A, se tiene que $a = k$.

Finalmente, definimos el producto cruzado $A \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$ como siendo el cociente de $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ por el ideal generado por las redundancias con $a \in A\alpha(A)A$.

Puede argumentarse que la construcción de este producto cruzado no es intrínseca al C^*-sistema dinámico (A, α), ya que uno debe elegir de antemano un operador de transferencia, que en general no es único. Sin embargo, en la mayoría de los ejemplos parece haber un operador de transferencia *distinguido*. Por ejemplo, cuando estamos frente a un endomorfismo inyectivo α de la C^*-álgebra A que tiene rango hereditario, el mapa

$$\begin{aligned} E : A &\rightarrow A, \\ a &\mapsto \alpha(1)a\alpha(1) \in \alpha(A) \end{aligned}$$

es una esperanza condicional de A sobre el rango de α, y la composición $\mathcal{L} = \alpha^{-1} \circ E$ es un operador de transferencia para el par (A, α), que en cierto sentido es canónico.

El contexto de los sistemas dinámicos clásicos, y más concretamente, el de endomorfismos inducidos por mapas de recubrimiento, es el que cuenta con resultados más satisfactorios en la teoría que desarrollaremos en este trabajo. A modo de ejemplo, mencionamos que es posible caracterizar la simplicidad del producto cruzado en términos de las propiedades topológicas del sistema dinámico en cuestión (ver el teorema 6.4.4). En algunos casos especiales es posible también dar una descripción satisfactoria de la estructura de ideales del producto cruzado en términos de los abiertos que son invariantes por el sistema dinámico (ver el teorema 6.3.8).

En cuanto a la estructura de este trabajo, hemos organizado su presentación de la siguiente forma.

En el primer capítulo damos un breve repaso de la teoría básica de los módulos de Hilbert y las C^*-correspondencias, que son una generalización natural de los espacios de Hilbert. A menos de algunas definiciones bálectura de este capítulo podría posponerse hasta después del capítulo 3.

En el segundo capítulo presentamos la construcción del producto cruzado por un endomorfismo, siguiendo el trabajo realizado por Exel en [9]. Este es el principal capítulo de este trabajo y en él se basan los capítulos 3, 5 y 6.

En el tercer capítulo se estudian algunos ejemplos de C^*-álgebras bien conocidas que surgen como productos cruzados por endomorfismos. También se compara la construcción introducida por Exel con otras nociones de producto cruzado anteriores, así como con el producto cruzado por un automorfismo.

El cuarto capítulo tiene como objetivo introducir las definiciones y primeras propiedades de ciertas álgebras asociadas a C^*-correspondencias: las álgebras de Toeplitz, de Cuntz-Pimsner y de Cuntz-Pimsner relativas.

El quinto capítulo está basado en el trabajo de Brownlowe y Raeburn [4] y muestra cómo el producto cruzado introducido por Exel puede identificarse como el álgebra de Cuntz-Pimsner asociada a una correspondencia que surge naturalmente a partir del endomorfismo y el operador de transferencia.

Finalmente, el sexto y último capítulo está dedicado al estudio del producto cruzado por endomorfismos que surgen a partir de un mapa de recubrimiento de un espacio compacto, como fue descrito más arriba. En este contexto es donde se cuenta con resultados más profundos, a pesar de estar todavía lejos de obtener una comprensión satisfactoria del comportamiento y estructura de esta construcción.

Por último, mencionamos que el orden de los capítulos presentado en este trabajo no es el único posible ni necesariamente el mejor. Los capítulos 1 y 4 son esencialmente independientes de los capítulos 2, 3 y 6; mientras que en el 5 se identifican las construcciones de los capítulos 2 y 4.

Aquellos lectores con interés en la topología y la dinámica podrían encontrar más motivaciones en la lectura si siguieran el orden 2-3-6-1-4-5, mientras que aquellos con interés en el álgebra podrían preferir el camino 1-2-4-5-3-6.

Capítulo 1

Preliminares en módulos de Hilbert y C^*-correspondencias.

En este capítulo se da un rápido resumen de las definiciones, propiedades y construcciones básicas asociadas a los módulos de Hilbert y a las C^*-correspondencias. Se dedicarán secciones especiales para la definición de los mapas adjuntables entre módulos de Hilbert, así como para la construcción del producto tensorial interno.

La referencia básica para esta sección es [13]. También se puede encontrar una presentación ordenada y condensada de esta teoría en el primer capítulo de [1].

1.1. Módulos de Hilbert.

Definición 1.1.1. Sea A una C^*-álgebra. Un *A-módulo de Hilbert (a derecha)* es una dupla $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, donde X espacio de Banach con estructura de A-módulo a derecha, y $\langle\cdot,\cdot\rangle_X : X \times X \to A$ es una función (denominada *producto interno en X con valores en A*), que satisface

- $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ es lineal en la segunda coordenada.
- $\langle x, y \cdot a\rangle_X = \langle x, y\rangle_X a$, para todos x, y en X, a en A.
- $\langle x, y\rangle_X^* = \langle y, x\rangle_X$, para todos x, y en X.
- $\langle x, x\rangle_X \geq 0$ para todo x en X, y $\langle x, x\rangle_X = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Además, exigimos que $\|x\|_X = \|\langle x, x\rangle_X^{\frac{1}{2}}\|_A$ para todo x en X, es decir, que la norma de X como espacio de Banach esté inducida por el producto interno con valores en A.

Análogamente se definen los módulos de Hilbert a *izquierda.*

Observación 1.1.2. Es usual escribir X_A, o simplemente X, en lugar de $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$.

Notación. Sea X_A un módulo de Hilbert. Si x es un elemento de X, denotamos $|x| = \langle x, x\rangle_X^{\frac{1}{2}}$ y le llamamos el *módulo* de x. Observar que el módulo de x es un elemento de A, y que la norma de x como elemento de X coincide con la norma de $|x|$ como elemento de A.

Los módulos de Hilbert representan una generalización natural de los espacios de Hilbert, donde el producto interno (que se asume lineal en la segunda coordenada) puede tomar valores no sólo en $\mathbb{C}$ sino en una C^*-álgebra arbitraria.

Los siguientes son ejemplos básicos de módulos de Hilbert.

Ejemplo 1. Sean A una C^*-álgebra e I un ideal de A. Entonces I es naturalmente un módulo a derecha, donde la acción de A está dada por $i \cdot a = ia$ para todos i en I, a en A. También existe un producto interno en el módulo$X = I$ con valores en A dado por $\langle i, j\rangle_= i^* j$ para todos i, j en I. Además, para todo i en I se tiene que

$$\|i\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle_X} = \|\langle i, i\rangle_X^{\frac{1}{2}}\| = \|i^* i\|_A^{\frac{1}{2}} = \|i\|.$$

Por lo tanto, I es naturalmente un módulo de Hilbert sobre A.

En particular, toda C^*-álgebra A es naturalmente un A-módulo de Hilbert sobre ella misma.

Observación 1.1.3. En vista del ejemplo anterior, si A es una C^*-álgebra, A es siempre un módulo de Hilbert sobre sí misma. Nos referiremos a la estructura del módulo A_A del ejemplo anterior como la estructura *canónica*.

Observación 1.1.4. Este ejemplo también muestra que la definición del valor absoluto de un elemento en un módulo de Hilbert es una generalización del concepto de valor absoluto en una C^*-álgebra. En efecto, si A es una C^*-álgebra y tomamos el módulo $X_A = A_A$, entonces

$$|a|_X = \langle a, a\rangle_X^{\frac{1}{2}} = (a^* a)^{\frac{1}{2}} = |a|_A.$$

Ejemplo 2. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert; denotamos su producto interno por $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$. Entonces $X = \mathcal{H}$ es un módulo de Hilbert sobre $A = \mathbb{C}$, donde la acción es la multiplicación por escalares, y el producto interno está dado por $\langle h, k\rangle_X = \langle k, h\rangle_{\mathcal{H}}$ para todos h, k en $\mathcal{H}$.

La siguiente es una generalización al contexto de los módulos de Hilbert de la desigualdad de Cauchy-Schwarz para espacios de Hilbert. Su demostración puede encontrarse en [13].

Lema 1.1.5. *Sea X un módulo de Hilbert sobre A. Entonces, para todos x, y en X se tiene que*

$$|\langle x, y\rangle_X|^2 \leq \|\langle x, x\rangle_X\| \langle y, y\rangle_X.$$

Corolario 1.1.6. *En el contexto del lema anterior,*

$$\|\langle x, y\rangle_X\|_A \leq \|x\|_X \|y\|_X \quad \text{ y } \quad \|x \cdot a\|_X \leq \|x\|_X \|a\|_A$$

para todos x, y en X y a en A. En particular, el mapa $\langle\cdot,\cdot\rangle_X : X \times X \to A$ es continuo.

1.2. Operadores adjuntables entre módulos de Hilbert.

En la categoría de los A-módulos de Hilbert, los morfismos serán los mapas lineales continuos que respetan la acción de A y que además admiten un operador adjunto, en el mismo sentido que en espacios de Hilbert. A pesar de que en estos últimos espacios, la continuidad de un operador basta para asegurar la existencia de un adjunto, en el contexto de los módulos de Hilbert esto no es suficiente, como veremos más adelante. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.2.1. Sean X_A, Y_A dos módulos de Hilbert y $T : X \to Y$ una función. Decimos que T es *adjuntable* si existe otra función $T^* : Y \to X$ que satisface para todos x en X, y en Y

$$\langle Tx, y\rangle_Y = \langle x, T^*y\rangle_X.$$

A una función como T^* se le denomina *adjunto* de T.

Observación 1.2.2. Si $T : X \to Y$ es adjuntable y T^* es un adjunto de T, entonces T y T^* son lineales y acotados.

Si X, Y son A-módulos de Hilbert, denotamos por $\mathfrak{L}(X,Y)$ al conjunto de los operadores adjuntables de X en Y. Además, resulta un espacio normado con la norma $\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|_Y$.

Lema 1.2.3. *Sea X un módulo de Hilbert sobre A. Entonces para todo x en X,*

$$\|x\|_X = \sup_{\|y\|\leq 1} \|\langle x, y\rangle_X\|_A = \sup_{\|y\|=1} \|\langle x, y\rangle_X\|_A.$$

Además, si $\langle x, z\rangle_X = \langle y, z\rangle_X$ para todo z en X, entonces $x = y$.

Proposición 1.2.4. *Sean X, Y, Z A-módulos de Hilbert, S y T en $\mathfrak{L}(X,Y)$, R en $\mathfrak{L}(Y,Z)$, y λ, μ en $\mathbb{C}$. Entonces*

- *T es A-lineal, es decir, $T(x \cdot a) = T(x) \cdot a$ para todos a en A y x en X.*
- *Existe un único adjunto para T, que denotaremos por T^*, y además T^* es un elemento de $\mathfrak{L}(Y,X)$.*
- *$\lambda S + \mu T$ es un operador en $\mathfrak{L}(X,Y)$ y $(\lambda S + \mu T)^* = \overline{\lambda} S^* + \overline{\mu} T^*$.*
- *$R \circ T$ es un operador adjuntable en $\mathfrak{L}(X,Z)$ y $(R \circ T)^* = T^* \circ R^*$.*
- *$\mathfrak{L}(X,Y)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}(X,Y)$.*
- *$\|T^*\| = \|T\|$ y $\|T^*T\| = \|T\|^2$.*

Demostración. Las afirmaciones (1)-(4) y (6) son rutinarias. Demostremos la (5). Para ver que los mapas adjuntables son acotados, usaremos el Teorema del Gráfico Cerrado.

Dado T en $\mathfrak{L}(X,Y)$, supongamos que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión en X que converge a un cierto x de X, y tal que $\lim_n Tx_n = y$ para un cierto y de Y. Probaremos que es $Tx = y$. En efecto, si z es un elemento de Y, entonces

$$\langle y, z\rangle_Y = \lim_n \langle Tx_n, z\rangle_Y = \lim_n \langle x_n, T^*z\rangle_X = \langle x, T^*z\rangle_X = \langle Tx, z\rangle_Y,$$

de modo que por el lema anterior se tiene que $y = Tx$, y por lo tanto T pertenece a $\mathcal{B}(X,Y)$.

Probemos que $\mathfrak{L}(X,Y)$ es cerrado en $\mathcal{B}(X,Y)$. Sea $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en $\mathfrak{L}(X,Y)$ que converge a un cierto T de $\mathcal{B}(X,Y)$. Por la propiedad (6), $\{T_n^*\}_{n=0}^{\infty}$ es también de Cauchy en $\mathcal{B}(X,Y)$, y por lo tanto existe S en $\mathcal{B}(X,Y)$ tal que $\lim_n T_n^* = S$. Veamos que $T^* = S$. Para ello, alcanza conobservar que para todos x en X, y en Y, se tiene

$$\langle Tx, y\rangle_Y = \lim_n \langle T_n x, y\rangle_Y = \lim_n \langle x, T_n^* y\rangle_X = \langle x, Sy\rangle_X.$$

□

Corolario 1.2.5. *Si X_A es un módulo de Hilbert, entonces $\mathfrak{L}(X)$ es una C^*-álgebra unital.*

El próximo ejemplo muestra que en general la inclusión $\mathfrak{L}(X,Y) \subseteq \mathcal{B}(X,Y)$ es estricta.

Ejemplo 3. Sean $X = C_0((0,1]), A = Y = C([0,1])$ con las estructuras de A-módulos de Hilbert definidas en el ejemplo 1, y $T : X \to Y$ la inclusión. Claramente T es una isometría, por lo que en particular es mapa acotado. Veamos que no es adjuntable. Para ello, supongamos que existe $T^* : Y \to X$ un adjunto de T. En ese caso,

$$\langle T(x), y\rangle_Y = \langle x, y\rangle_Y = x^* y$$

y también

$$\langle T(x), y\rangle_Y = \langle x, T^*(y)\rangle_X = x^* T^*(y)$$

para todos x en $C_0((0,1])$, y en $C([0,1])$. Por lo tanto, debe ser $T^*(y) = y$ para todo y de $C([0,1])$, lo cual es absurdo.

Terminamos este apartado definiendo los operadores compactos generalizados en módulos de Hilbert. Al igual que en espacios de Hilbert, podemos definirlo como la clausura del ideal (algebraico) generado por los operadores de rango finito. Comenzamos definiendo estos últimos.

Definición 1.2.6. Sean X, Y dos módulos de Hilbert sobre A. Si $x \in X, y \in Y$, definimos $\theta_{y,x} : X \to Y$ por $\theta_{y,x}(z) = y\langle x, z\rangle_X$ para todo z en X.

Observación 1.2.7. Sean X, Y, Z módulos de Hilbert sobre A. Entonces

$$\theta_{y,x}^* = \theta_{x,y} \quad \text{y} \quad \theta_{z,y'} \circ \theta_{y,x} = \theta_{z,\langle y,y'\rangle x},$$

para x en X, y, y' en Y y z en Z.

Definimos el *álgebra de operadores de rango finito* entre X e Y por

$$\mathcal{F}(X,Y) = span\{\theta_{y,x} : x \in X, y \in Y\}.$$

Por la observación anterior, $\mathcal{F}(X)$ es una $*$-subálgebra de $\mathfrak{L}(X)$.

Definición 1.2.8. Si X, Y son módulos de Hilbert sobre A, definimos el *álgebra de operadores compactos* entre X e Y por $\mathcal{K}(X,Y) = \overline{\mathcal{F}(X,Y)}$.

Observación 1.2.9. Si X es un módulo de Hilbert, entonces $\mathcal{K}(X)$ es una C^*-subálgebra de $\mathfrak{L}(X)$. Más aún, es un ideal de $\mathfrak{L}(X)$.

Demostración. Alcanza con ver que $\mathcal{F}(X)$ es un ideal (algebraico) de $\mathfrak{L}(X)$, ya que la clausura de un ideal es también un ideal. Para ello, basta notar que si T es un operador adjuntable en X, entonces

$$T \circ \theta_{y,x} = \theta_{Ty,x} \quad \text{y} \quad \theta_{y,x} \circ T = \theta_{y,T^*x}$$

para todos x, y en X. □

Observemos que en general, si X, Y son módulos de Hilbert sobre A y T es un operador compacto entre ellos (según la definición anterior), entonces no necesariamente T es compacto en el sentido de operadores entre espacios de Banach. En efecto, si A es un álgebra unital y tomamos $X = Y = A$, entonces $id_A = \theta_{1,1}$ es un operador compacto (y por lo tanto $\mathcal{K}(A) = \mathfrak{L}(A)$), y claramente no es un operador compacto viendo a A como un espacio de Banach, a menos que la dimensión de A sea finita.

1.3. Productos tensoriales de módulos de Hilbert.

Procedemos a definir brevemente el producto tensorial *interno* entre dos módulos de Hilbert. También presentamos varias propiedades que él satisface. El objetivo es dejar registro de las definiciones que usaremos en la próxima sección.

Definición 1.3.1. Sean X e Y dos A y B-módulos de Hilbert a derecha respectivamente, y $\phi : A \to \mathfrak{L}(Y)$ un homomorfismo. Podemos ver a Y como un A-módulo a izquierda, con la acción dada por $a \cdot y = \phi(a)y$ para a en A, y en Y.

Consideramos el producto tensorial $X \odot_A Y$ como siendo el cociente del producto tensorial algebraico $X \otimes_{alg} Y$ por el subespacio generado por los elementos de la forma

$$x \cdot a \otimes y - x \otimes \phi(a)y,$$

para $x \in X,\ y \in Y$ y $a \in A$.

Hay una acción de B en $X \odot_A Y$ dada por $(x \otimes y) \cdot b = x \otimes (y \cdot b)$, con lo cual $X \odot_A Y$ es un B-módulo.

Proposición 1.3.2. *(Proposición 4.5 de [13]). En las condiciones de la definición anterior, $X \odot_A Y$ es un B-módulo con producto interno, donde el producto interno en tensores simples está dado por*

$$\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle_{X \odot_A Y} = \langle y_1, \phi(\langle x_1, x_2 \rangle_X) y_2 \rangle_Y,$$

para todos x_1, x_2 en X, y_1, y_2 en Y.

Demostración. La demostración consiste en mostrar que la fórmula anterior en el producto tensorial algebraico $X \otimes_{alg} Y$ define una forma sesquilineal y positiva, y que los elementos $w \in X \otimes_{alg} Y$ de norma nula son exactamente los del subespacio generado por las diferencias $x \cdot a \otimes y - x \otimes \phi(a)y$ para x en X, y en Y y a en A. □

Definición 1.3.3. Sean X e Y dos A y B-módulos de Hilbert a derecha respectivamente, y $\phi : A \to \mathfrak{L}(Y)$ un homomorfismo. El *producto tensorial interno* de X con Y relativo al homomorfismo ϕ, que denotamos por $X \otimes_A Y$, es la completación de $X \odot_A Y$ con respecto a la norma que induce el producto interno definido en la proposición anterior.

Observación 1.3.4. En las condiciones de la definición anterior, $X \otimes_A Y$ es un B-módulo de Hilbert a derecha, con la acción y el producto interno inducidos por las correspondientes en $X \odot_A Y$.

Ejemplo 4. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, A una C^*-álgebra, $\pi : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una representación, y X un A-módulo de Hilbert. En virtud del ejemplo 2, a menos de conjugar su producto interno, $\mathcal{H}$ es un $\mathbb{C}$-módulo de Hilbert, y por lo tanto el homomorfismo $\pi : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H}) \cong \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ nos permite construir el producto tensorial interno $X \otimes_A \mathcal{H}$, que resulta un $\mathbb{C}$-módulo de Hilbert, es decir, un espacio de Hilbert. El producto interno en $X \otimes_A \mathcal{H}$ queda determinado por

$$\langle x \otimes h, y \otimes k \rangle_{X \otimes \mathcal{H}} = \langle h, \pi(\langle x, y \rangle_X) k \rangle_{\mathcal{H}},$$

para todos x, y en X y h, k en $\mathcal{H}$.

En este mismo contexto, podemos definir $Ind(\pi) : \mathfrak{L}(X) \to \mathfrak{L}(X \otimes_A \mathcal{H}) \cong \mathcal{B}(X \otimes_A \mathcal{H})$ por

$$Ind(\pi)(S)(x \otimes h) = Sx \otimes h,$$

para S en $\mathfrak{L}(X)$ y h en $\mathcal{H}$. Además, se cumple que $Ind(\pi)$ es inyectiva si π lo es. En efecto, sea S en $\mathfrak{L}(X)$ tal que $Ind(\pi)(S) = 0$. Esto equivale a que para todos x en X y h en $\mathcal{H}$,

$$0 = Ind(\pi)(S)(x \otimes h) = Sx \otimes h.$$

Como π es inyectiva, la identidad anterior (válida para todo h) equivale a que $Sx = 0$ para todo x, es decir, $S = 0$, y así $Ind(\pi)$ es inyectiva.

Ver el capítulo 4 de [13] por más detalles en este y otros ejemplos.

1.4. C^*-correspondencias.

En esta sección definiremos las C^*-correspondencias, también llamadas por algunos autores *bimódulos de Hilbert*: ver [12]. Evitaremos usar ese término para referirnos a las correspondencias, ya que ese nombre usualmente es reservado para un objeto que tiene estructura de módulo de Hilbert tanto a derecha como a izquierda (en particular, están munidos de *dos* productos internos). Sugerimos consultar el primer capítulo de [1] por las definiciones de estos y otros objetos.

Definición 1.4.1. Una *correspondencia (a derecha)* es una terna (A, X, B), donde X_B es un módulo de Hilbert a derecha, y existe una acción $\cdot : A \times X \to X$ que satisface

$$\langle a \cdot x, y \rangle_X = \langle x, a^* \cdot y \rangle_X,$$

para todos x, y en X, a en A.

Equivalentemente, X_B es un módulo de Hilbert y se tiene un homomorfismo $\phi : A \to \mathfrak{L}(X_B)$ dado por $\phi(a)x = a \cdot x$.

Obsérvese que, debido a las propiedades del producto interno, la definición dada implica que toda correspondencia (A, X, B) es en particular un $A - B$-bimódulo: X admite una acción a izquierda de A y una a derecha de B.

Por otro lado, observemos también que una correspondencia es en particular un módulo de Hilbert a derecha. Por lo tanto, todos los resultados de las secciones anteriores son aplicables a las correspondencias.

En la mayoría de este trabajo estaremos interesados sólo en correspondencias en las cuales las acciones a izquierda y derecha estén dadas por la misma álgebra. Será frecuente el uso de la siguiente convención.

Notación. Es usual denotar a las correspondencias de la forma (A, X, A) simplemente por (X, A) o X_A, indicando que se trata de una correspondencia y no de un módulo. En estos casos diremos que X es una correspondencia sobre A o una A-correspondencia.

Ejemplo 5. Sea A una C^*-álgebra. El ejemplo 1 muestra cómo obtener el módulo de Hilbert A_A. Además, la multiplicación a izquierda por elementos de A define una acción de A por operadores adjuntables de A, dándole a A una estructura de correspondencia sobre sí misma. Al igual que en la observación 1.1.3, nos referiremos a esta estructura de correspondencia para una C^*-álgebra como la *canónica*.

Observación 1.4.2. Sean (A, X, B) y (B, Y, C) dos correspondencias. Denotamos sus acciones izquierdas por ϕ_X y ϕ_Y respectivamente. De acuerdo a la definición del producto tensorial interno entre módulos de Hilbert (1.3.3), podemos formar el producto tensorial entre los módulos de Hilbert X_B e Y_C relativo al homomorfismo $\phi_Y : B \to \mathfrak{L}(Y)$. Así $X \otimes_B Y$ es un C-módulo de Hilbert. Además, la acción de A en X induce una acción de A en $X \otimes_B Y$ dada por $a \cdot (x \otimes y) = (a \cdot x) \otimes y$, dándole a $X \otimes_B Y$ estructura de $(A - C)$-correspondencia. Ver [1] por los detalles de esta construcción.

Terminamos este capítulo definiendo la suma directa de una familia arbitraria de correspondencias. Los detalles técnicos que ella involucra pueden encontrarse en [12].

Definición 1.4.3. Sean A una C^*-álgebra y $\{X^\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una familia de correspondencias sobre A. Entonces la suma directa algebraica X_0 es un A-módulo a derecha con semiproducto interno, donde

$$(x_\lambda) \cdot a = (x_\lambda \cdot a) \quad \text{y} \quad \langle (x_\lambda), (y_\lambda) \rangle = \sum_\lambda \langle x_\lambda, y_\lambda \rangle.$$

Podemos entonces completar X_0 para obtener un A-módulo de Hilbert que denotamos $X = \oplus_{\lambda \in \Lambda} X^\lambda$. Existe una acción a izquierda de A en X_0 definida por $a \cdot (x_\lambda) = (a \cdot x_\lambda)$, que extiende a una acción de A por operadores adjuntables en $\oplus_\lambda X^\lambda$, dándole a éste una estructura de correspondencia sobre A.

Capítulo 2

Una nueva definición del producto cruzado por un endomorfismo.

2.1. Operadores de transferencia.

Sean A una C^*-álgebra unital y $\alpha : A \to A$ un endomorfismo. Comenzamos retomando la definición motivada en la introducción.

Definición 2.1.1. Un *operador de transferencia* para el par (A, α) es un mapa lineal y positivo $\mathcal{L} : A \to A$ que verifica $\mathcal{L}(\alpha(a)b) = a\mathcal{L}(b)$ para todos a, b en A.

Observación 2.1.2. Como consecuencia de la positividad, un operador de transferencia $\mathcal{L}$ siempre es continuo y autoadjunto, es decir, $\mathcal{L}(a^*) = \mathcal{L}(a)^*$ para todo a en A. En consecuencia, también se verifica $\mathcal{L}(a\alpha(b)) = \mathcal{L}(a)b$ para todos a, b en A. En particular, el rango de $\mathcal{L}$ es un ideal bilateral de A.

Observación 2.1.3. Sea $\mathcal{L}$ un operador de transferencia para el par (A, α). Entonces el núcleo de α y la imagen de $\mathcal{L}$ son ortogonales: $\ker(\alpha) \perp \text{rango}(\mathcal{L})$.

Demostración. Dados $a \in \ker(\alpha), b \in A$, tenemos que $a\mathcal{L}(b) = \mathcal{L}(\alpha(a)b) = 0$. $\square$

Denotaremos por $\mathcal{R}$ a la imagen de α: $\mathcal{R} = \alpha(A)$, que es una C^*-subálgebra de A.

Definición 2.1.4. Dada una C^*-álgebra B, una *esperanza condicional* en B es un mapa lineal y positivo (y por lo tanto continuo) $E : B \to B$ tal que la imagen de E es una C^*-subálgebra de B, $E|_{E(B)} = id_{E(B)}$ y tal que E es lineal para la estructura de $E(B)$-bimódulo de B, esto es, si $a \in B$, $b \in E(B)$, entonces $E(ab) = E(a)b$ y $E(ba) = bE(a)$.

Observación 2.1.5. En las condiciones de la definición anterior, $E^2 = E$ y si E es no nulo, entonces $\|E\| = 1$.

Dado un operador de transferencia $\mathcal{L}$, definimos $E : A \to A$ por $E = \alpha \circ \mathcal{L}$, que es lineal y positivo. Además, E es lineal para la estructura de $\mathcal{R}$-bimódulo de A. En efecto, si $a \in A$ y $b \in \mathcal{R}$ con $b = \alpha(c)$, se tiene

$$E(ab) = \alpha(\mathcal{L}(ab)) = \alpha(\mathcal{L}(a\alpha(c))) = \alpha(\mathcal{L}(a)c) = E(a)b.$$

Como $E(A) \subseteq \mathcal{R}$, para probar que E es una esperanza condicional de A sobre $\mathcal{R}$, bastará ver que $E|_{\mathcal{R}} = id_{\mathcal{R}}$. La siguiente proposición da condiciones necesarias y suficientes en $\mathcal{L}$ para que esto ocurra.

Proposición 2.1.6. *Sea $\mathcal{L}$ un operador de transferencia para el par (A, α). Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$E = \alpha \circ \mathcal{L}$ es una esperanza condicional sobre $\mathcal{R}$.*
2. *$\alpha \circ \mathcal{L} \circ \alpha = \alpha$.*
3. *$\alpha(\mathcal{L}(1)) = \alpha(1)$.*

Demostración. Veamos primero que las condiciones (1) y (3) son equivalentes. Si $E|_{\mathcal{R}} = id_{\mathcal{R}}$, entonces $\alpha(\mathcal{L}(\alpha(a))) = E(\alpha(a)) = \alpha(a)$ para todo a en A. Recíprocamente, si $b = \alpha(a)$ es un elemento de $\mathcal{R}$, entonces $E(b) = E(\alpha(a)) = \alpha(\mathcal{L}(\alpha(a))) = \alpha(a) = b$, y así $E|_{\mathcal{R}} = id_{\mathcal{R}}$.

Veamos ahora que las condiciones (2) y (3) son equivalentes. Supongamos que $\alpha \circ \mathcal{L} \circ \alpha = \alpha$. Tomando $a = 1$ en la identidad $\mathcal{L}(\alpha(a)) = a\mathcal{L}(1)$ deducimos que $\mathcal{L}(\alpha(1)) = \mathcal{L}(1)$ y que por lo tanto $\alpha(1) = \alpha(\mathcal{L}(\alpha(1))) = \alpha(\mathcal{L}(1))$. Recíprocamente, si $\alpha(\mathcal{L}(1)) = \alpha(1)$, tenemos que $\alpha(a) = \alpha(1)\alpha(a) = \alpha(\mathcal{L}(1)a) = \alpha(\mathcal{L}(\alpha(a)))$ para todo a en A. ☐

Definición 2.1.7. Un operador de transferencia $\mathcal{L}$ es *no degenerado* si cumple cualquiera de las equivalentes condiciones en la proposición anterior.

Los operadores de transferencia no degenerados presentan buenas propiedades y los ejemplos más interesantes de las construcciones de este trabajo se obtendrán a partir de ellos. Sin perjucio de ello, la teoría se llevará adelante bajo las hipótesis más generales posibles.

Proposición 2.1.8. *Sea $\mathcal{L}$ un operador de transferencia no degenerado para el par (A, α). Entonces* $\ker(\alpha) = \operatorname{rango}(\mathcal{L})^{\perp}$. *En particular* $\operatorname{rango}(\mathcal{L})$ *es cerrado y* $A = \ker(\alpha) \oplus \operatorname{rango}(\mathcal{L})$.

Demostración. Como el rango de $\mathcal{L}$ y el núcleo de α son ortogonales, bastará demostrar que su suma es A. Para ello, sea a en A y observemos que $a = (a - \mathcal{L}(\alpha(a))) + \mathcal{L}(\alpha(a))$, donde $\alpha(a - \mathcal{L}(\alpha(a))) = 0$ si $\mathcal{L}$ es no degenerado. ☐

La siguiente proposición proporciona un método general para obtener operadores de transferencia no degenerados. Además, en el caso en que el endomorfismo α sea inyectivo, este resultado muestra que existe una biyección entre las esperanzas condicionales sobre $\mathcal{R}$ y los operadores de transferencia *no degenerados* para (A, α).

Proposición 2.1.9. *Sean $E : A \to \mathcal{R}$ una esperanza condicional sobre $\mathcal{R}$, J un ideal de A tal que $A = J \oplus \ker(\alpha)$ y $\beta : \mathcal{R} \to J$ la inversa de la restricción de α a J: $\beta = (\alpha|_J)^{-1}$. Entonces $\mathcal{L} := \beta \circ E$ es un operador de transferencia no degenerado para el par (A, α) y además $\alpha \circ \mathcal{L} = E$.*

Demostración. Es claro que $\mathcal{L}$ es positivo, por ser la composición de dos mapas positivos. Por otro lado, como
$$\mathcal{L}(\alpha(a)b) = \beta(E(\alpha(a)b)) = \beta(\alpha(a)E(b)),$$
y $\alpha|_J$ es inyectiva, tenemos que $\mathcal{L}(\alpha(a)b) = a\mathcal{L}(b)$ si y sólo si $\alpha(\beta(\alpha(a)E(b))) = \alpha(a\mathcal{L}(b))$. Dado que α es inversa a izquierda de β, el primer término es igual a $\alpha(a)E(b)$. Finalmente,
$$\alpha(a\mathcal{L}(b)) = \alpha(a\beta \circ E(b)) = \alpha(a)\alpha \circ \beta(E(b)) = \alpha(a)E(b),$$
lo que prueba que $\mathcal{L}$ es un operador de transferencia. Finalmente, $\alpha \circ \mathcal{L} = \alpha \circ \beta \circ E = E$ y esto prueba que $\mathcal{L}$ es no degenerado, ya que E es una esperanza condicional. ☐

2.2. El producto cruzado.

En esta sección, fijamos una C^*-álgebra unital A, un endomorfismo $\alpha : A \to A$ y un operador de transferencia $\mathcal{L} : A \to A$ para el par (A, α).

Definición 2.2.1. Denotaremos por $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ a la C^*-álgebra unital universal cuya unidad coincide con la unidad de A, y que está generada por una copia de A y un elemento S sujetos a las relaciones

1. $Sa = \alpha(a)S$
2. $S^*aS = \mathcal{L}(a)$

para todo a en A.

Observación 2.2.2. Como $\|S\|^2 = \|S^*S\| = \|\mathcal{L}(1)\|$, las relaciones anteriores son admisibles en el sentido de Blackadar (ver [3]), lo cual implica la existencia del álgebra universal.

Observación 2.2.3. Si $\mathcal{L}(1) = 1$, entonces S es una isometría, a pesar de que en general este elemento no será ni siquiera una isometría parcial.

Por definición, $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ es universal para la familia de representaciones que definimos a continuación.

Definición 2.2.4. Una *representación Toeplitz-covariante* de la terna $(A, \alpha, \mathcal{L})$ en una C^*-álgebra unital B es un par (ρ, V) donde $\rho : A \to B$ es un homomorfismo unital y V es un elemento de B, que además satisfacen

- $V\rho(a) = \rho(\alpha(a))V$
- $V^*\rho(a)V = \rho(\mathcal{L}(a))$

para todo a en A.

Denotamos por (i_A, S) a la representación Toeplitz-covariante universal de $(A, \alpha, \mathcal{L})$ en $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$. La universalidad de $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ con respecto a las representaciones Toeplitz-covariantes de $(A, \alpha, \mathcal{L})$ debe entenderse de acuerdo al enunciado de la siguiente proposición.

Proposición 2.2.5. *Sea (ρ, V) una representación Toeplitz-covariante de $(A, \alpha, \mathcal{L})$ en una C^*-álgebra B. Entonces existe un único homomorfismo $\rho \times V : \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L}) \to B$ que satisface $\rho \times V(S) = V$ y que hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "\rho"'] & \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L}) \arrow[d, "\rho \times V"] \\ & B. \end{tikzcd}$$

El siguiente lema proporciona un método sencillo para el cálculo del producto de dos elementos en $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$.

Lema 2.2.6. *Dados n, m, j, k en $\mathbb{N}$ y a, b, c, d en A, sean x, y en $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ dados por $x = i_A(a)S^n S^{*m} i_A(b), y = i_A(c)S^j S^{*k} i_A(d)$. Entonces*

$$xy = \begin{cases} i_A(a\alpha^n(\mathcal{L}^m(bc)))S^{n-m+j}S^{*k}i_A(d), & si\ m \leq j; \\ i_A(a)S^n S^{*m-j+k} i_A(\alpha^k(\mathcal{L}^j(bc))d), & si\ m \geq j. \end{cases}$$

Demostración. Verificamos la igualdad en el caso $m \leq j$; el otro es análogo.

$$\begin{aligned} xy &= (i_A(a)S^n S^{*m} i_A(b)) \left(i_A(c) S^j S^{*k} i_A(d) \right) = i_A(a) S^n S^{*m} i_A(bc) S^m m S^{j-m} S^{*k} i_A(d) \\ &= i_A(a) S^n i_A(\mathcal{L}^m(bc)) S^{j-m} S^{*k} i_A(d) = i_A(a\alpha^n(\mathcal{L}^m(bc))) S^{n+j-m} S^{*k} i_A(d). \end{aligned}$$

□

Como consecuencia, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.2.7. *El álgebra $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ coincide con el subespacio cerrado generado por*

$$X = \{ i_A(a) S^n S^{*m} i_A(b) : a, b \in A \text{ y } n, m \in \mathbb{N} \}.$$

Demostración. Por el lema anterior, el subespacio generado por X es un álgebra. Como también es autoadjunto, su clausura es una C^*-subálgebra de $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$. Por último, como contiene a A y a S, debe coincidir con esta última. □

Si bien el mapa $i_A : A \to \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ no es inyectivo en condiciones más generales, sí lo será en este contexto. Para probar esto, alcanzará con encontrar una representación Toeplitz-covariante (ρ, V) tal que $\rho : A \to B$ sea inyectiva (si este es el caso, decimos que (ρ, V) es una representación Toeplitz-covariante *fiel*). En efecto, la proposición anterior implicará que $\rho \times V \circ i_A = \rho$ y por lo tanto i_A será necesariamente inyectiva.

Construiremos a continuación una representación Toeplitz-covariante fiel de $(A, \alpha, \mathcal{L})$ en los operadores adjuntables de cierta correspondencia. Esta correspondencia será a su vez la suma de cierta sucesión de correspondencias, donde el primer sumando será la C^*-álgebra A. Comenzamos la construcción definiendo el segundo sumando.

Sea $A_{\mathcal{L}}$ una copia de A como espacio vectorial en donde definimos una estructura de A-módulo a derecha a través de $m \cdot a = m\alpha(a)$ para cada m en $A_{\mathcal{L}}$ y a en A. También definimos un producto interno en $A_{\mathcal{L}}$ con valores en A por $\langle m, n \rangle_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(m^* n)$ para m, n en $A_{\mathcal{L}}$. Si $N := \{ a \in A_{\mathcal{L}} : \langle a, a \rangle_{\mathcal{L}} = 0 \}$, entonces N es un subespacio de $A_{\mathcal{L}}$ por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, de modo que pasando al cociente por el mismo obtenemos el mapa cociente $q : A_{\mathcal{L}} \to \frac{A_{\mathcal{L}}}{N}$. Completando $q(A_{\mathcal{L}}) = \frac{A_{\mathcal{L}}}{N}$ si es necesario, obtenemos un A-módulo de Hilbert a derecha, que denotamos $M_{\mathcal{L}}$. A los elementos de $q(A_{\mathcal{L}})$ los denotaremos igual que a los elementos de $A_{\mathcal{L}}$, es decir, omitiremos el mapa q para no cargar la notación.

Por otro lado, si $a \in A, m \in A_{\mathcal{L}}$, tenemos que

$$\| \langle am, am \rangle_{\mathcal{L}} \| = \| \mathcal{L}(m^* a^* am) \| \leq \|a\|^2 \| \mathcal{L}(m^* m) \| = \|a\|^2 \| \langle m, m \rangle_{\mathcal{L}} \|,$$

por lo que la multiplicación a izquierda por un elemento $a \in A$ en $A_{\mathcal{L}}$ induce un operador $\phi(a) : M_{\mathcal{L}} \to M_{\mathcal{L}}$ que resulta acotado y puede verse que es adjuntable. Queda definido así un homomorfismo $\phi : A \to \mathfrak{L}(M_{\mathcal{L}})$, dándole a $M_{\mathcal{L}}$ estructura de correspondencia sobre A.

Lema 2.2.8. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathcal{L}^n$ es un operador de transferencia para el par (A, α^n). Además, el mapa*

$$\begin{aligned} \gamma_n : A_{\mathcal{L}^n} &\to A_{\mathcal{L}^{n+1}} \\ x &\mapsto \alpha(x) \end{aligned}$$

extiende a un mapa lineal y adjuntable $\gamma_n : M_{\mathcal{L}^n} \to M_{\mathcal{L}^{n+1}}$*, con* $\|\gamma_n\| \leq \|\mathcal{L}(1)\|^{\frac{1}{2}}$ *y cuyo adjunto está dado por*

$$\begin{array}{rcl} \gamma_n^* : M_{\mathcal{L}^{n+1}} & \to & M_{\mathcal{L}^n} \\ x & \mapsto & \mathcal{L}(x). \end{array}$$

Demostración. Es claro que $\mathcal{L}^n$ es positivo. Ya que para $n = 1$, $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}$ es un operador de transferencia para (A, α^1), inductivamente deducimos que

$$\mathcal{L}^n(\alpha^n(a)b) = \mathcal{L}^{n-1}(\mathcal{L}(\alpha(\alpha^{n-1}(a)b))) = \mathcal{L}^{n-1}(\alpha^{n-1}(a)\mathcal{L}(b)) = a\mathcal{L}^n(b).$$

Por otro lado, si $x \in A_{\mathcal{L}^n}$,

$$\langle\gamma_n(x), \gamma_n(x)\rangle_{\mathcal{L}^{n+1}} = \langle\alpha(x), \alpha(x)\rangle_{\mathcal{L}^{n+1}} = \mathcal{L}^n(\mathcal{L}(\alpha(x^*x))) = \mathcal{L}^n(x^*\mathcal{L}(1)x) \leq \|\mathcal{L}(1)\|\langle x, x\rangle_{\mathcal{L}^n},$$

de modo que γ_n es acotado en $A_{\mathcal{L}^n}$ y por lo tanto extiende a un mapa lineal $\gamma_n : M_{\mathcal{L}^n} \to M_{\mathcal{L}^{n+1}}$, con $\|\gamma_n\| \leq \|\mathcal{L}(1)\|^{\frac{1}{2}}$.

Dados $x \in A_{\mathcal{L}^n}, y \in A_{\mathcal{L}^{n+1}}$, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \langle\gamma_n(x), y\rangle_{\mathcal{L}^{n+1}} & = & \mathcal{L}^{n+1}(\gamma_n(x)^*y) = \mathcal{L}^{n+1}(\alpha(x^*)y) = \mathcal{L}^n(\mathcal{L}(\alpha(x)y)) = \mathcal{L}^n(x^*\mathcal{L}(y)) \\ & = & \langle x, \mathcal{L}(y)\rangle_{\mathcal{L}^n}, \end{array}$$

Además,

$$\|\mathcal{L}(y)\|^2_{\mathcal{L}^n} \leq \|\langle\mathcal{L}(y), \mathcal{L}(y)\rangle_{\mathcal{L}^n}\| = \|\langle\gamma_n(\mathcal{L}(y)), y\rangle_{\mathcal{L}^n}\| \leq \|\gamma_n\|\|\mathcal{L}(y)\|_{\mathcal{L}^n}\|y\|_{\mathcal{L}^{n+1}},$$

así que $\|\mathcal{L}(y)\|_{\mathcal{L}^n} \leq \|\gamma_n\|\|y\|_{\mathcal{L}^{n+1}}$, y en consecuencia el mapa $A_{\mathcal{L}^{n+1}} \to A_{\mathcal{L}^n}$ definido por $y \mapsto \mathcal{L}(y)$ induce un mapa lineal y continuo $M_{\mathcal{L}^{n+1}} \to M_{\mathcal{L}^n}$, que claramente es el adjunto de γ_n. □

Corolario 2.2.9. *Sean* M_∞ *la correspondencia sobre* A *definida por* $M_\infty = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_{\mathcal{L}^n}$ *y* $S : M_\infty \to M_\infty$ *definido por*

$$S(x_0, x_1, \ldots) = (0, \gamma_0(x_0), \gamma_1(x_1), \ldots).$$

Entonces S *es adjuntable y su adjunto está dado por* $S^*(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (\mathcal{L}(x_1), \mathcal{L}(x_2), \ldots)$.

El próximo teorema implica la inyectividad del mapa canónico $A \to \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$.

Teorema 2.2.10. *Sea* $\mathcal{L}$ *un operador de transferencia para* (A, α)*. Entonces existen un espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$*, una representación fiel* $\rho : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$*, y un operador* $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *tales que*

1. $S\rho(a) = \rho(\alpha(a))S$
2. $S^*\rho(a)S = \rho(\mathcal{L}(a))$

para todo a *en* A.

Demostración. Consideramos la C^*-álgebra $\mathfrak{L}(M_\infty)$ y concebimos la estructura de A-módulo a izquierda de M_∞ como dada por un homomorfismo $\rho : A \to \mathfrak{L}(M_\infty)$. Como $M_{\mathcal{L}^n}$ es invariante por ρ para cada natural n y $\rho|_{M_{\mathcal{L}^0}}$ es fiel, deducimos que ρ es fiel en M_∞. Si S es el operador definido en el corolario anterior, entonces

$$\begin{aligned} S\rho(a)(x_0, x_1, \ldots) &= S(ax_0, ax_1, \ldots) = (0, \gamma_0(x_0), \gamma_1(x_1) \ldots) = (0, \alpha(ax_0), \alpha(ax_1), \ldots) \\ &= \rho(\alpha(a))S(x_0, x_1, \ldots), \end{aligned}$$

de modo que $S\rho(a) = \rho(\alpha(a))S$ para todo a en A. Por otro lado,

$$\begin{aligned} S^*\rho(a)S(x_0, x_1, \ldots) &= S^*(0, a\alpha(x_0), a\alpha(x_1), \ldots) = (\mathcal{L}(a\alpha(x_0)), \mathcal{L}(a\alpha(x_1)), \ldots) \\ &= (\mathcal{L}(a)x_0, \mathcal{L}(a)x_1, \ldots) = \rho(\mathcal{L}(a))(x_0, x_1, \ldots), \end{aligned}$$

por lo que $S^*\rho(a)S = \rho(\mathcal{L}(a))$ para todo a en A. Finalmente, para obtener una representación de A como la del enunciado del teorema, basta componer ρ con cualquier representación fiel de $\mathfrak{L}(M_\infty)$ en algún espacio de Hilbert. □

De aquí en más consideraremos a A como una C^*-subálgebra de $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ a través del mapa i_A, y denotaremos al representante canónico de S en esta C^*-álgebra simplemente por S.

Notación. Sean B una C^*-álgebra y $X, Y \subseteq B$ subconjuntos cualesquiera. Por XY denotaremos al subespacio cerrado generado por los productos de elementos de X y elementos de Y: $XY = \overline{span}\{xy : x \in X, y \in Y\} \subseteq B$. Análogamente, si T es un elemento de B, $XT := \overline{span}\{xT : x \in X\}$ y $TX = \overline{span}\{Tx : x \in X\}$.

Denotamos por M al subespacio cerrado de $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ dado por $M = i_A(A)S$. Entonces

- $Mi_A(A) \subseteq M$: $i_A(a)Si_A(b) = i_A(a)i_A(\alpha(b))S \in i_A(A)S$ para todos a, b en A.
- $i_A(A)M \subseteq M$: $i_A(b)i_A(a)S = i_A(ab)S \in i_A(A)S$ para todos a, b en A.
- $M^*M \subseteq i_A(A)$: $S^*i_A(a^*b)S = \mathcal{L}(a^*b) \in i_A(A)$ para todos a, b en A.
- $MM^*M \subseteq Mi_A(A) \subseteq M$.

Por lo tanto, M es invariante por la multiplicación a izquierda por elementos de A y también por elementos de MM^*. Puede ocurrir entonces que para ciertos a en A y k en MM^*, los operadores de multiplicación a izquierda en M por $i_A(a)$ y por k coincidan, esto es, que para todo b en A, $i_A(a)i_A(b)S = ki_A(b)S$. Esto motiva la definición que nos permitirá construir el producto cruzado de A por α relativo al operador de transferencia $\mathcal{L}$.

Definición 2.2.11. Un par $(a, k) \in A \times i_A(A)SS^*i_A(A)$ es una *redundancia* si para todo b en A, se tiene que $i_A(a)i_A(b)S = ki_A(b)S$.

En lo que sigue, estaremos interesados solamente en aquellas redundancias (a, k) para las cuales $a \in A\mathcal{R}A$, el ideal generado por $\mathcal{R} = \alpha(A)$. Denotamos por $\mathcal{I}(A, \alpha, \mathcal{L})$ al ideal de $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ generado por el conjunto

$$\{a - k : (a, k) \text{ es una redundancia con } a \in A\mathcal{R}A\}.$$

Definición 2.2.12. Sean una C^*-álgebra unital A, un endomorfismo $\alpha : A \to A$ y un operador de transferencia $\mathcal{L} : A \to A$ relativo al par (A, α). El *producto cruzado de A por α relativo al operador de transferencia $\mathcal{L}$* es

$$A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} = \frac{\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})}{\mathcal{I}(A, \alpha, \mathcal{L})},$$

y denotamos por $q : \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L}) \to A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ al mapa cociente.

Un problema que surge es que el mapa $j_A : A \to A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ dado por $j_A = q \circ i_A$ no es siempre inyectivo, por ejemplo cuando $\mathcal{L}$ es el operador nulo. A pesar de verificar la inyectividad de j_A en algunos casos concretos (como los que se exponen en el capítulo siguiente), Exel no logró encontrar condiciones necesarias y suficientes para que esto ocurra. Por otro lado, en [9] Exel conjetura que la inyectividad de j_A equivale a que el operador de transferencia $\mathcal{L}$ sea no degenerado.

Esta pregunta se mantuvo sin respuesta hasta la aparición de [4], donde los autores identifican el producto cruzado definido por Exel como una cierta álgebra de Cuntz-Pimsner relativa (ver el teorema 3.3.5). Como consecuencia de este resultado, y a la luz de la teoría conocida para las álgebras de Cuntz-Pimsner (ver el lema 4.2.15), los autores también obtienen una condición necesaria y suficiente en el operador de transferencia $\mathcal{L}$ para que el mapa j_A sea inyectivo (ver el teorema 5.3.2).

La condición encontrada por Brownlowe y Raeburn, si bien no es exactamente que el operador de transferencia sea no degenerado, se refiere a su fidelidad en cierto ideal de A. Este resultado confirma en algún sentido la intuición de Exel, quien sugirió la existencia de una relación entre alguna clase de fidelidad de $\mathcal{L}$ (la noción que él consideró fue la de ser no degenerado), con la inyectividad de j_A.

2.3. Existencia de acciones canónicas en $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ y $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$.

En esta sección describiremos ciertos grupos de automorfismos a un parámetro de las álgebras $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ y $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$. Una elección particular del parámetro dará lugar a acciones canónicas en estas álgebras.

Proposición 2.3.1. *Sea u un unitario en el centro de A. Entonces existe un único automorfismo σ_u de $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ que satisface*

$$\sigma_u(S) = i_A(u)S \quad y \quad \sigma_u(i_A(a)) = i_A(a),$$

para todo a en A. Además, $\sigma_u(\mathcal{I}(A, \alpha, \mathcal{L})) = \mathcal{I}(A, \alpha, \mathcal{L})$, de modo que σ_u pasa al cociente induciendo un automorfismo δ_u de $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ que satisface

$$\delta_u(S) = j_A(u)S \quad y \quad \delta_u(j_A(a)) = j_A(a),$$

para todo a en A.

Por último, si v es otro unitario en el centro de A, entonces $\sigma_u \sigma_v = \sigma_{uv}$ y $\delta_u \delta_v = \delta_{uv}$.

Demostración. Sea $S_u = i_A(u)S \in \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$, y observemos que para todo a en A se tiene que

$$S_u i_A(a) = i_A(u)Si_A(s) = i_A(u\alpha(a))S = i_A(\alpha(a))i_A(u)S = i_A(\alpha(a))S_u,$$

y

$$S_u^* i_A(s)S_u = S^* i_A(u^* au)S = S^* i_A(a)S = i_A(\mathcal{L}(a)),$$

de modo que el par (i_A, S_u) es una representación Toeplitz-covariante de $(A, \alpha, \mathcal{L})$ en $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$.

Por la propiedad universal de $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$, existe un único homomorfismo

$$\sigma_u : \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L}) \to \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$$

tal que $\sigma_u(S) = S_u$ y $\sigma_u(i_A(a)) = i_A(a)$ para todo a en A. Dado v como en el enunciado, observemos que

$$\sigma_u\sigma_v(S) = \sigma_u(i_A(v)S) = i_A(v)\sigma_v(S) = i_A(vu)S = i_A(uv)S = \sigma_{uv}(S),$$

y $\sigma_u\sigma_v(i_A(a)) = i_A(a)$ para todo a en A. Así, $\sigma_u\sigma_v = \sigma_{uv}$. Como σ_{u^*} es la inversa de σ_u, σ_u es un automorfismo.

Para probar el correspondiente resultado para $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$, alcanza con probar que

$$\sigma_u(\mathcal{I}(A, \alpha, \mathcal{L})) = \mathcal{I}(A, \alpha, \mathcal{L}).$$

Sea (a, k) una redundancia. Entonces

$$\sigma_u(k) \in \sigma_u(i_A(A)SS^* i_A(A)) = i_A(A)uSS^* u^* i_A(A) = i_A(A)SS^* i_A(A).$$

Además, para todo b en A se tiene

$$\sigma_u(k)i_A(b)S = \sigma_u(k)i_A(bu^* u)S = \sigma_u(ki_A(bu^*)S) = \sigma_u(i_A(abu^*)S) = i_A(a)i_A(b)S,$$

por lo que $(i_A(a), \sigma_u(k))$ es también una redundancia y así $\sigma_u(\mathcal{I}(A, \alpha, \mathcal{L})) \subseteq \mathcal{I}(A, \alpha, \mathcal{L})$. Como ocurre lo mismo para σ_{u^*} deducimos que estos conjuntos son iguales. □

Sea h un elemento autoadjunto en el centro de A tal que existe un número real $c > 0$ con $h \geq c1_A$ (en particular h es invertible). Entonces para cada t en $\mathbb{R}$, h^{it} es un unitario central de A, y por lo tanto define un automorfismo de $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ de acuerdo a la proposición anterior, que denotaremos por σ_t^h. Además, $\sigma_t^h\sigma_s^h = \sigma_{t+s}^h$, de modo que $\sigma^h : t \mapsto \sigma_t^h$ determina un grupo de automorfismos a un parámetro de $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$.

Pasando al cociente obtenemos un grupo de automorfismos a un parámetro de $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ que denotamos por δ^h.

Definición 2.3.2. Las acciones σ^h y δ^h de $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ y $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ respectivamente, inducidas por un elemento h como en el párrafo anterior, se llaman *acciones canónicas asociadas a h*.

Cuando h es el número de Neper e, tenemos que $\sigma_t^h(S) = e^{it}S$, de modo que la acción canónica inducida por e es periódica de período 2π, y por lo tanto define una acción $\gamma : \mathbb{T} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L}))$ que satisface

$$\gamma_z(S) = zS \quad \text{y} \quad \gamma_z(i_A(a)) = i_A(a),$$

para todos z en $\mathbb{T}$ y a en A. Análogamente, obtenemos una acción del círculo por automorfismos de $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$, que satisface las mismas condiciones, y que también denotaremos por γ.

Definición 2.3.3. Denominamos a las acciones definidas en el párrafo anterior *acciones canónicas* de $\mathbb{T}$ en $\mathcal{T}(A,\alpha,\mathcal{L})$ y $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ respectivamente.

Proposición 2.3.4. *Las acciones canónicas de $\mathbb{T}$ en $(T)(A,\alpha,\mathcal{L})$ y $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ son fuertemente continuas.*

Demostración. Sean z, w en $\mathbb{T}$ y $\xi = \sum_{i=1}^{n} a_i S^{n_i} S^{*m_i} b_i$ en $\mathcal{T}(A,\alpha,\mathcal{L})$. Entonces

$$\|\gamma_z(\xi)-\gamma_w(\xi)\| = \|\sum_{i=1}^{n}(z^{n_i-m_i}-w^{n_i-m_i})a_i S^{n_i} S^{*m_i} b_i\| \leq \sum_{i=1}^{n}|z^{n_i-m_i}-w^{n_i-m_i}|\|a_i S^{n_i} S^{*m_i} b_i\|,$$

por lo que $\|\gamma_z(\xi) - \gamma_w(\xi)\|$ tiende a cero cuando w tiende a z. Esto prueba que si X es el subespacio denso de $\mathcal{T}(A,\alpha,\mathcal{L})$ de los elementos de la forma $\sum_{i=1}^{n} a_i S^{n_i} S^{*m_i} b_i$, entonces γ es fuertemente continua en X.

Sean ahora η un elemento cualquiera de $\mathcal{T}(A,\alpha,\mathcal{L})$ y ϵ un número real positivo. Como X es denso, existe ξ en X tal que $\|\eta - \xi\| < \frac{\epsilon}{3}$. Entonces, si w en $\mathbb{T}$ satisface $\|\gamma_z(\xi) - \gamma_w(\xi)\| < \frac{\epsilon}{3}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|\gamma_z(\eta) - \gamma_w(\eta)\| &\leq \|\gamma_z(\eta) - \gamma_z(\xi)\| + \|\gamma_z(\xi) - \gamma_w(\xi)\| + \|\gamma_w(\xi) - \gamma_w(\eta)\| \\ &< \|\eta - \xi\| + \frac{\epsilon}{3} + \|\xi - \eta\| < \epsilon. \end{aligned}$$

Finalmente, el mismo argumento muestra que la acción canónica en $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ también es fuertemente continua. □

Más adelante estaremos interesados en el álgebra de puntos fijos de la acción canónica, y el siguiente resultado será de utilidad.

Proposición 2.3.5. *Sean B una C^*-álgebra con una acción continua γ del círculo por automorfismos. Supongamos que B coincide con la clausura del subespacio generado por un conjunto $\{x_i : i \in I\}$ que satisface que para todo i en I existe n_i en $\mathbb{Z}$ tal que $\gamma_z(x_i) = z^{n_i} x_i$ para todo z en $\mathbb{T}$. Entonces el álgebra de puntos fijos para γ coincide con $\overline{\mathrm{span}}\{x_i : n_i = 0\}$.*

Demostración. Asumiremos conocido el hecho de que el mapa $P : B \to B$ dado por

$$P(a) = \int_{\mathbb{T}} \gamma_z(a)dz$$

es una esperanza condicional sobre el álgebra de puntos fijos de γ. Es inmediato que $P(x_i) = 0$ cuando n_i es no nulo, y que $P(x_i) = x_i$ si $n_i = 0$. Así, $\overline{span}\{x_i : n_i = 0\}$ está contenido en el álgebra de puntos fijos de γ. Veamos la inclusión contraria.

Dados b, un punto fijo de γ, y $\epsilon > 0$, sea $\{\lambda_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{C}$ tal que $\|b - \sum_{i\in I} \lambda_i x_i\| < \epsilon$. Entonces

$$\left\|b - \sum_{n_i=0} \lambda_i x_i\right\| = \left\|P\left(b - \sum_{i\in I} \lambda_i x_i\right)\right\| \leq \left\|b - \sum_{i\in I} \lambda_i x_i\right\| < \epsilon,$$

de modo que b está en la clausura de $\mathrm{span}\{x_i : n_i = 0\}$, lo que termina la prueba. □

Corolario 2.3.6. *El álgebra de puntos fijos de $\mathcal{T}(A,\alpha,\mathcal{L})$ (respectivamente, de $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$) para la acción canónica γ, es el subespacio cerrado generado por los elementos de la forma $i_A(a) S^n S^{*n} i_A(b)$ (respectivamente, $j_A(a) S^n S^{*n} j_A(b)$) para todos a, b en A y n en $\mathbb{N}$.*

Demostración. alcanza conobservar que el conjunto

$$X = \{i_A(a)S^n S^{*m} i_A(b) : a, b \in A \text{ y } n, m \in \mathbb{N}\}$$

de la proposición 2.2.7 puede indexarse como en la proposición anterior, donde

$$\gamma_z(i_A(a)S^n S^{*m} i_A(b)) = z^{n-m} i_A(a)S^n S^{*m} i_A(B).$$

Un resultado análogo a la proposición 2.2.7 puede obtenerse para $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$, y así repetir el argumento usado para $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ en el párrafo anterior para llegar a la conclusión deseada. □

Terminamos esta sección con un resultado técnico que también será de utilidad en los siguientes capítulos. Antes una definición.

Definición 2.3.7. Denotaremos por M_n y K_n a los subespacios cerrados de $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ dados por

$$M_n = j_A(A)S^n \quad \text{ y } \quad K_n = M_n M_n^* = j_A(A)S^n S^{*n} j_A(A).$$

Proposición 2.3.8. *Para cada par de naturales n y m con $n \leq m$, se tiene que*

1. $K_n M_m \subseteq M_m$ *y*
2. $K_n K_m \subseteq K_m$.

Demostración. Dados a, b y c en A, tenemos que

$$(j_A(a)S^n S^{*n} j_A(b))\,(j_A(c)S^m) = j_A(a)S^n S^{*n} j_A(bc)S^n S^{m-n} = j_A(a\alpha^n(\mathcal{L}^n(bc)))S^m,$$

de donde se deduce la primera afirmación. Para la segunda, tenemos que

$$K_n K_m \subseteq K_n M_m M_m^* \subseteq M_m M_m^* = K_m.$$

□

Corolario 2.3.9. *Para cada n en $\mathbb{N}$, K_n es una C^*-subálgebra de $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$.*

En algunos casos, los espacios K_n forman una sucesión creciente (por ejemplo, en el caso de los endomorfismos de índice finito; ver la sección 5.2). En cualquier caso,

$$\mathcal{U} := \overline{\sum_{n=0}^{\infty} K_n}$$

es una C^*-subálgebra de $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$.

Corolario 2.3.10. *Por el corolario 2.3.6, $\mathcal{U}$ es precisamente el álgebra de puntos fijos de la acción canónica en $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$.*

Capítulo 3

Algunos ejemplos de productos cruzados.

En este capítulo compararemos la construcción del producto cruzado por un endomorfismo debida a Exel con otras construcciones existentes. Verificaremos que la definición presentada en el capítulo anterior generaliza la noción del producto cruzado de una C^*-álgebra por el grupo de los enteros (ver la proposición 3.1.4), así como algunas definiciones de productos cruzados por endomorfismos hechas en situaciones particulares (ver el teorema 3.2.9).

En su artículo [9], Exel se valió de algunos ejemplos que guiaran su construcción. Uno de estos ejemplos es el que presentamos en la tercera sección: las álgebras de Cuntz-Krieger. En efecto, Exel explica tener la convicción de que cualquier definición de producto cruzado por un endomorfismo, debería dar lugar al álgebra de Cuntz-Krieger asociada a una matriz de ceros y unos $\mathcal{A}$, cuando se considera el endomorfismo asociado al shift en el espacio de caminos que surge de la matriz $\mathcal{A}$.

3.1. El caso de un automorfismo.

Las definiciones existentes de productos cruzados por endomorfismos intentan generalizar la noción existente y aceptada de producto cruzado por un automorfismo, al que denominaremos producto cruzado *clásico*. Así, es natural esperar que las nuevas definiciones coincidan con el producto cruzado clásico en el caso de un automorfismo. Por otro lado, el hecho de que una cierta definición generalice a otra permite tener una cierta intuición sobre el comportamiento y la estructura de la nueva definición.

Por todo esto, los resultados de esta sección, que tienen como objetivo identificar el producto cruzado de Exel con el producto cruzado clásico en el caso de un automorfismo, no deberían resultar sorprendentes. En efecto, los comentarios en la introducción que motivaron las elecciones de las relaciones que definen el álgebra $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ tienen implícita la existencia de algún tipo de relación entre las álgebras que identificaremos en la proposición 3.1.4.

Supongamos que $\alpha : A \to A$ es un automorfismo, y sea $\mathcal{L}$ un operador de transferencia para α. Si $\mathcal{L}$ es no degenerado, entonces $E = \alpha \circ \mathcal{L}$ es una esperanza condicional sobre la imagen de α, que es A. Por lo tanto, $E = id_A$, y $\mathcal{L}$ es una inversa a derecha de α.

Como $\alpha(\mathcal{L}(1)) = 1 = \alpha(1)$, debe ser $\mathcal{L}(1) = 1$. Así, $\mathcal{L}(\alpha(a)) = a\mathcal{L}(1) = a$, de modo que $\mathcal{L}$ también es inversa a izquierda de α. Esto implica que el único operador de transferencia no degenerado para (A, α) es α^{-1}.

Fijamos α^{-1} como operador de transferencia. En este caso, $\mathcal{T}(A, \alpha, \alpha^{-1})$ es la C^*-álgebra universal generada por una copia de A y un elemento S, sujetos a las relaciones

$$\begin{aligned} Sa &= \alpha(a)S \\ S^*aS &= \alpha^{-1}(a), \end{aligned}$$

para todo a en A. Equivalentemente, $\mathcal{T}(A, \alpha, \alpha^{-1})$ es el álgebra universal generada por una copia de A y una isometría S sujetos a

$$Sa = \alpha(a)S,$$

para todo a en A.

Proposición 3.1.1. *Para todo a en A, el par $(\alpha(a), SaS^*)$ es una redundancia. Además, toda redundancia tiene esta forma.*

Demostración. En primer lugar, $SaS^* = \alpha(a)SS^*$ es un elemento de $MM^* = ASS^*A$. Por otro lado, sea b en A. Entonces

$$SaS^*bS = Sa\alpha^{-1}(b) = \alpha(a\alpha^{-1}(b))S = \alpha(a)bS,$$

por lo que $(\alpha(a), SaS^*)$ es una redundancia.

La última afirmación se deduce directamente del lema 5.2.1, de donde además deducimos que $(\psi_S, i_A)^(1)(\phi(a)) = SaS^*$ para todo a en A. □

Observación 3.1.2. En particular, el par $(1, SS^*)$ es una redundancia, y por lo tanto el elemento canónico S de $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ es unitario.

Observación 3.1.3. Si a es un elemento de A, entonces $\alpha(a)(1 - SS^*) = \alpha(a) - \alpha(a)SS^* = \alpha(a) - SaS^*$. En consecuencia,

$$\mathcal{I}(A, \alpha, \alpha^{-1}) = A\{\alpha(a) - SaS^* : a \in A\}A = A\{1 - SS^*\}A.$$

Proposición 3.1.4. *El producto cruzado $A \rtimes_{\alpha,\alpha^{-1}} \mathbb{N}$ es isomorfo al producto cruzado clásico $A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$.*

Demostración. En este punto, resta observar que el producto cruzado $A \rtimes_{\alpha,\alpha^{-1}} \mathbb{N}$, queda determinado agregando una relación a las que definen $\mathcal{T}(A, \alpha, \alpha^{-1})$, a saber, $1 = SS^*$. Explícitamente, $A \rtimes_{\alpha,\alpha^{-1}} \mathbb{N}$ es el álgebra universal generada por una copia de A y un elemento unitario S sujetos a las relaciones

$$\begin{aligned} Sa &= \alpha(a)S, \\ S^*aS &= \alpha^{-1}(a), \end{aligned}$$

para todo a en A. Podemos expresar estas dos relaciones de forma conjunta, imponiendo que

$$SaS^* = \alpha(a),$$

para todo a en A.

Por último, esta es precisamente la descripción de $A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, que resulta isomorfa al producto cruzado $A \rtimes_{\alpha,\alpha^{-1}} \mathbb{N}$. □

Observación 3.1.5. La proposición anterior puede obtenerse sin hacer uso de los resultados de Brownlowe y Raeburn. Una forma de hacerlo es invocar la propiedad universal de $A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ para el álgebra $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$.

3.2. Endomorfismos inyectivos de rango hereditario.

En esta sección nos concentraremos en el caso en que el rango del endomorfismo α es hereditario, y compararemos las construcciones del producto cruzado de un álgebra (unital) por un endomorfismo con estas características, originalmente introducido por Murphy en [15], con el producto cruzado que acabamos de definir. El principal resultado de esta sección afirma que las dos construcciones dan lugar a álgebras isomorfas. Además, existe un isomorfismo entre ellas con una descripción bastante concreta.

Definición 3.2.1. Sean B una C^*-álgebra y C una C^*-subálgebra de B. Decimos que C es una subálgebra *hereditaria* si cada vez que $b \in B^+, c \in C^+$ y $b \leq c$, se tiene que $b \in C$.

Ejemplo 6. Sean B una C^*-álgebra y $p \in B$ una proyección. Entonces pBp es una subálgebra hereditaria.

Demostración. Sean $a, b \in B$ y supongamos que $0 \leq b \leq pap$. Veamos que $b \in pBp$, es decir, que $b = pbp$.

Multiplicando las desigualdades anteriores por $(1-p)$ y $(1-p)^* = (1-p)$ en cada término, las desigualdades se mantienen y obtenemos que

$$0 \leq (1-p)b(1-p) \leq (1-p)pap(1-p) = 0,$$

de modo que $(1-p)b(1-p) = 0$. Como b es positivo, existe su raíz cuadrada positiva $b^{\frac{1}{2}} \in B$, y se cumple que

$$\|b^{\frac{1}{2}}(1-p)\|^2 = \|(1-p)^* b^{\frac{1}{2}*} b^{\frac{1}{2}}(1-p)\| = \|(1-p)b(1-p)\| = 0.$$

Así $b(1-p)=0$ y por lo tanto, $b = bp$. Análogamente se prueba que $(1-p)b = 0$ y así $b = pb$. En consecuencia, $b = pbp$. □

Fijamos una C^*-álgebra unital A y un endomorfismo $\alpha : A \to A$. Denotamos por P a la proyección $\alpha(1)$.

Observación 3.2.2. En las condiciones anteriores, $\mathcal{R} = \alpha(A) \subseteq PAP$, ya que

$$\alpha(a) = \alpha(1a1) = \alpha(1)\alpha(a)\alpha(1) = P\alpha(a)P.$$

Proposición 3.2.3. *$\mathcal{R}$ es una subálgebra hereditaria de A si y sólo si $\mathcal{R} = PAP$.*

Demostración. La implicancia “si”se debe al ejemplo anterior, al ser P una proyección en A. Para ver la implicancia “sólo si”, bastará ver que si $\mathcal{R}$ es hereditaria, entonces $PAP \subseteq \mathcal{R}$. Si a es un elemento de PAP^+,

$$0 \leq a = PaP \leq \|a\|P = \|a\|\alpha(1) \in \mathcal{R},$$

y por lo tanto $a \in \mathcal{R}$. Así, $PAP^+ \subseteq \mathcal{R}$ y en consecuencia $PAP \subseteq \mathcal{R}$. □

De aquí en adelante, supondremos que $\alpha(A)$ es una subálgebra hereditaria, y por lo tanto que coincide con PAP. De esto se deduce que

$$E : A \to PAP = \mathcal{R} \ : \ a \mapsto PaP$$

es una esperanza condicional de A sobre $\mathcal{R}$. También supondremos que α es inyectiva, de modo que la composición $\mathcal{L} = \alpha^{-1} \circ E$ define un operador de transferencia no degenerado para el par (A, α), en virtud de la proposición 2.1.9, poniendo $J = A$.

Proposición 3.2.4. *En las condiciones anteriores, se tiene que*

1. *El elemento $S \in \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ es una isometría, y por lo tanto también lo es su imagen $S \in A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$.*

2. *Para cada a en A, el par $(\alpha(a), SaS^*)$ es una redundancia.*

Demostración. (1). Calculamos directamente con las definiciones:

$$S^*S = S^*1S = \mathcal{L}(1) = \alpha^{-1}(E(1)) = \alpha^{-1}(\alpha(1)1\alpha(1)) = \alpha^{-1}(\alpha(1)) = 1.$$

(2). Sea b en A. Entonces

$$\begin{aligned} SaS^*bS &= Sa\mathcal{L}(b) = Sa\alpha^{-1}(E(b)) = \alpha(a)E(b)S = \alpha(a)\alpha(1)b\alpha(1)S \\ &= \alpha(a)b\alpha(1)S = \alpha(a)bS1 = \alpha(a)bS, \end{aligned}$$

donde en la tercera y en la última igualdad se usó la identidad $Sc = \alpha(c)S$ válida para todo c en A. El cálculo anterior implica que $(\alpha(a), SaS^*)$ es una redundancia. □

Definición 3.2.5. Denotamos por $\mathcal{U}(A, \alpha)$ a la C^*-álgebra unital universal generada por A y una isometría T sujetos a la condición $\alpha(a) = TaT^*$ para todo a en A.

Proposición 3.2.6. *En las condiciones de la definición anterior, existe un único homomorfismo sobreyectivo $\phi : \mathcal{U}(A, \alpha) \to A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ que verifica $\phi(a) = a$ para todo a en A y $\phi(T) = S$.*

Demostración. Como $S \in A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ es una isometría y $\alpha(a) = SaS^*$, la propiedad universal de $\mathcal{U}(\alpha, A)$ asegura la existencia de tal homomorfismo que resulta sobreyectivo. □

Proposición 3.2.7. *Existe un único homomorfismo sobreyectivo $\psi : \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L}) \to \mathcal{U}(A, \alpha)$ tal que $\psi(S) = T$ y $\psi|_A = id_A$.*

Demostración. Para todo a en A, $Ta = TaT^*T = \alpha(a)T$. Además, como $TT^* = T1T^* = \alpha(1) = P$, tenemos que

$$\begin{aligned} T^*aT &= T^*TT^*aTT^*T = T^*PaPT = T^*E(a)T = T^*(\alpha(\alpha^{-1}(E(a))))T \\ &= T^*(\alpha(\mathcal{L}(a)))T = T^*T\mathcal{L}(a)T^*T = \mathcal{L}(a). \end{aligned}$$

Por lo tanto, los elementos de A y T de $U(A, \alpha)$ cumplen las relaciones en la definición de la C^*-álgebra universal $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$. La afirmación del enunciado se deduce de la propiedad universal de dicha álgebra. □

Corolario 3.2.8. *El mapa cociente $\mathcal{T}(A,\alpha,\mathcal{L}) \to A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ se factoriza a través de $\mathcal{U}(A,\alpha)$ por medio de ϕ y ψ: el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}(A,\alpha,\mathcal{L}) \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} \\ \mathcal{U}(A,\alpha) \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Teorema 3.2.9. *En las condiciones anteriores, el mapa $\phi : \mathcal{U}(A,\alpha) \to A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ es un isomorfismo.*

Demostración. Veamos en primer lugar que ψ se anula en $\mathcal{I}(A,\alpha,\mathcal{L})$. Sea $(a,k) \in A\mathcal{R}A \times MM^*$ una redundancia. Aplicando ψ a la identidad $abS = kbS$ válida para todo b en A, obtenemos que $abT = \psi(k)bT$ para todo b en A. Teniendo en cuenta que $P = \alpha(1) = TT^*$, para todos b, c en A se tiene

$$abPc = abTT^*c = \psi(k)bTT^*c = \psi(k)bPc.$$

Por lo tanto, $ax = \psi(k)x$ o equivalentemente, $(a - \psi(k))x = 0$, para todo x en APA. Como $k \in MM^* = ASS^*A, \psi(k) = ATT^*A = APA$ y $a \in A\mathcal{R}A = APAPA = APA$, podemos tomar $x = (a-\psi(k))^* \in APA$ para obtener $(a-\psi(k))(a-\psi(k))^* = 0$, lo que implica que $\psi(k) = a$, y en consecuencia $\psi(k-a) = 0$. Por lo tanto, $\mathcal{I}(A,\alpha,\mathcal{L}) \subseteq \ker\psi$, como queríamos ver.

Pasando al cociente por $\mathcal{I}(A,\alpha,\mathcal{L})$, obtenemos un mapa $\widetilde{\psi} : A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} \to \mathcal{U}(A,\alpha)$, que es el inverso de ϕ. En efecto, como los elementos de A y T generan la C^*-álgebra $\mathcal{U}(A,\alpha)$, basta observar que

$$\widetilde{\psi}(\phi(a)) = \widetilde{\psi}(a) = a,$$
$$\widetilde{\psi}(\phi(T)) = \widetilde{\psi}(S) = T,$$

y que sucede algo similar con la composición $\phi \circ \widetilde{\psi}$. ☐

Es claro que los resultados de la sección anterior pueden obtenerse a partir de este último teorema. Sin embargo, elegimos esta presentación por separado porque el caso de un automorfismo parece dar una idea más concreta e intuición en torno a la construcción estudiada.

3.3. Álgebras de Cuntz-Krieger como productos cruzados.

En esta sección, fijamos un número natural n y una matriz $\mathcal{A}$ de tamaño $n \times n$ con coeficientes en el conjunto $\{0,1\}$. Suponemos además que ninguna fila de $\mathcal{A}$ es idénticamente nula, y permitimos que $\mathcal{A}$ tenga columnas triviales.

Recordemos que el álgebra de Cuntz-Krieger asociada a $\mathcal{A}$, que denotamos por $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$, es la C^*-álgebra universal generada por isometrías parciales $s_1, \ldots, s_n$ sujetas a las condiciones

$$\sum_{i=1}^n s_i s_i^* = 1 \quad \text{y} \quad s_i^* s_i = \sum_{i=1}^n \mathcal{A}(i,j) s_j s_j^*.$$

El objetivo de esta sección es probar que el álgebra de Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ es isomorfa al producto cruzado de una cierta álgebra conmutativa por un endomorfismo que surge naturalmente a partir de los sub-shifts de Markov.

Comenzamos con la notación que usaremos en esta sección. $\mathcal{G}$ denotará al conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Además, si $\mathcal{G}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto es el espacio de Cantor correspondiente, denotaremos por $\Omega_{\mathcal{A}}$ al subespacio de él definido por

$$\Omega_{\mathcal{A}} = \{(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{G}^{\mathbb{N}} : \mathcal{A}(\xi_i, \xi_{i+1}) = 1 \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\}.$$

Sea $\sigma : \Omega_{\mathcal{A}} \to \Omega_{\mathcal{A}}$ el mapa usualmente denominado *sub-shift de Markov*, es decir, el mapa definido como

$$\sigma(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (\xi_2, \xi_3, \ldots) \quad \text{para todo } \xi = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \Omega_{\mathcal{A}}.$$

En particular,

$$|\sigma^{-1}(\xi)| = |\{x \in \mathcal{G} : \mathcal{A}(x, \xi_1) = 1\}| = \sum_{x \in \mathcal{G}} \mathcal{A}(x, \xi_1).$$

Sea $Q : \Omega_{\mathcal{A}} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ la función definida por $Q(\xi) = \sum_{x \in \mathcal{G}} \mathcal{A}(x, \xi_1)$. Por depender únicamente de la primera coordenada de ξ, Q es continua.

Observación 3.3.1. Como $|\sigma^{-1}(\xi)| = Q(\xi)$, es claro que la imagen de σ es el conjunto de los elementos ξ en $\Omega_{\mathcal{A}}$ tales que $Q(\xi) > 0$. En consecuencia, σ es sobreyectiva si y sólo si Q no se anula en $\Omega_{\mathcal{A}}$, y esto a su vez equivale a que $\mathcal{A}$ no tenga ninguna columna idénticamente nula.

Observación 3.3.2. Como $\sigma(\Omega_{\mathcal{A}}) = Q^{-1}(\mathbb{N})$ y $\mathbb{N}$ es abierto y cerrado en $\mathbb{N} \cup \{0\}$, concluimos que la imagen de σ es también un conjunto abierto y cerrado en $\Omega_{\mathcal{A}}$. En particular, el álgebra $C(\Omega_{\mathcal{A}})$ se escribe como la suma de dos ideales:

$$C(\Omega_{\mathcal{A}}) = C(\sigma(\Omega_{\mathcal{A}})) \oplus C\left(\Omega_{\mathcal{A}} \setminus \sigma(\Omega_{\mathcal{A}})\right).$$

Consideramos el endomorfismo α del álgebra conmutativa $C(\Omega_{\mathcal{A}})$, que de aquí en más denotaremos por A, definido por $\alpha(f) = f \circ \sigma$, para cada f en A. Es inmediato verificar que α es inyectivo si y sólo si σ es sobreyectivo, que a su vez equivale a la ausencia de columnas nulas. No descartamos este caso precisamente para mostrar que esta construcción de productos cruzados no presenta inconvenientes al tratar con endomorfismos no inyectivos.

Observación 3.3.3. De acuerdo a los comentarios anteriores, el núcleo de α consiste en aquellas funciones f de $\Omega_{\mathcal{A}}$ que se anulan en la imagen de σ. En virtud de la observación 3.3.2, podemos escribir $C(\Omega_{\mathcal{A}}) = C(\sigma(\Omega_{\mathcal{A}})) \oplus \ker(\alpha)$.

Siguiendo la construcción de la proposición 2.1.9, escribimos $J = C(\sigma(\Omega_{\mathcal{A}}))$ y denotamos por $\mathcal{R}$ a la imagen de α y por β a la inversa de la restricción $\alpha|_J : J \to \mathcal{R}$.

Si f es un elemento de $C(\Omega_{\mathcal{A}})$, sea $E(f) : \Omega_{\mathcal{A}} \to \Omega_{\mathcal{A}}$ la función definida por

$$E(f)(\xi) = \frac{1}{|\sigma^{-1}(\sigma(\xi))|} \sum_{\sigma(\eta) = \sigma(\xi)} f(\eta) \quad \text{para toda } f \in \Omega_{\mathcal{A}}.$$

En otras palabras, $E(f)(\xi)$ es el promedio de los valores de f en los elementos de $\Omega_{\mathcal{A}}$ que tienen la misma imagen que ξ por σ.

Proposición 3.3.4. *Para toda f en $C(\Omega_{\mathcal{A}})$, $E(f)$ es un elemento de $C(\Omega_{\mathcal{A}})$. Además, el mapa $E : C(\Omega_{\mathcal{A}}) \to C(\Omega_{\mathcal{A}})$ es una esperanza condicional positiva sobre $\mathcal{R}$.*

Demostración. Sean $f \in C(\Omega_{\mathcal{A}})$ y $\xi \in \Omega_{\mathcal{A}}$. Es claro que $E(f)(\xi)$ depende únicamente de $\sigma(\xi)$, de modo que $E(f)$ es constante en los conjuntos de nivel de σ. Como σ es continua, también lo es $E(f)$.

Por otro lado, $E^2(f)(\xi) = E\big(E(f)\big)(\xi)$ es el promedio de los valores que toma $E(f)$ en los elementos de $\sigma^{-1}(\sigma(\xi))$. Cada uno de estos valores es $E(f)(\xi)$ (por ser éste el promedio correspondiente), y por lo tanto su promedio es $E^2(f)(\xi) = E(f)(\xi)$, y así E es un idempotente.

Finalmente, es claro que E es positivo y se verifica que la imagen de E es precisamente $\mathcal{R}$. $\square$

De acuerdo a la proposición 2.1.9, $\mathcal{L} = \beta \circ E : A \to A$ es un operador de transferencia para el par (A, α). Un cálculo directo muestra que si $f \in A$ y $\xi \in \Omega_{\mathcal{A}}$, entonces $\mathcal{L}(f)(\xi)$ está dado por

$$\mathcal{L}(f)(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{|\sigma^{-1}(\xi)|} \sum_{\sigma(\eta)=\xi} f(\eta), & \text{si } \xi \text{ está en la imagen de } \sigma; \\ 0, & \text{si } \xi \text{ no está en la imagen de } \sigma. \end{cases}$$

El objetivo de esta sección es demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3.3.5. *El álgebra de Cuntz-Krieger asociada a $\mathcal{A}$ se obtiene como un producto cruzado por un endomorfismo. Concretamente, si α y $\mathcal{L}$ son los operadores en A antes definidos, tenemos que*

$$\mathcal{O}_{\mathcal{A}} \cong C(\Omega_{\mathcal{A}}) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}.$$

Demostración. Si x es un elemento de $\mathcal{G}$, denotamos por Q_x y P_x a las funciones continuas de $C(\Omega_{\mathcal{A}})$ en $\{0, 1\}$ definidas por

$$Q_x(\xi) = \mathcal{A}(x, \xi_1) \quad \text{y} \quad P_x(\xi) = \delta_{x,\xi_1}.$$

Observemos que Q_x, P_x son proyecciones de A. Además, se tiene que $Q = \sum_{x\in\mathcal{G}} Q_x$, y para cada x en $\mathcal{G}$, es

$$Q_x = \sum_{y\in\mathcal{G}} \mathcal{A}(x, y) P_y.$$

Trabajando en el álgebra $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$, para cada x de $\mathcal{G}$, sea $S_x = P_x \alpha(Q)^{\frac{1}{2}} S$, y observemos que

$$S_x^* S_x \;=\; S^* \alpha(Q)^{*\frac{1}{2}} P_x^* P_x \alpha(Q)^{\frac{1}{2}} S = S^* \alpha(Q) P_x S.$$

Por otro lado, si $\xi \in A$, es

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\alpha(Q)P_x)(\xi) &= \begin{cases} \frac{1}{|\sigma^{-1}(\xi)|} \sum_{\sigma(\eta)=\xi} \big(\alpha(Q)P_x\big)(\eta), & \text{si } \xi \in \sigma(\Omega_{\mathcal{A}})); \\ 0, & \text{si } \xi \notin \sigma(\Omega_{\mathcal{A}}). \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{Q(\xi)} \sum_{\sigma(\eta)=\xi} Q(\sigma(\eta)) P_x(\eta), & \text{si } \xi \in \sigma(\Omega_{\mathcal{A}})); \\ 0, & \text{si } \xi \notin \sigma(\Omega_{\mathcal{A}}). \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sum_{\sigma(\eta)=\xi} \delta_{x,\eta_1} & \text{si } Q(\xi) > 0; \\ 0, & \text{si } Q(\xi) = 0. \end{cases} \\
&= \sum_{\eta_1\in\mathcal{G}} \mathcal{A}(x, \eta_1) P_{\eta_1}(\xi) = Q_x(\xi).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $S_x^*S_x = Q_x$, y como Q_x es una proyección, S_x es una isometría parcial.

Afirmación: $S_x^*S_x = \sum_{y\in\mathcal{G}} \mathcal{A}(x,y)S_yS_y^*$ ***en*** $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$**.**

Basta verificar que el par $\left(Q_x, \sum_{y\in\mathcal{G}} \mathcal{A}(x,y)S_yS_y^*\right)$ es una redundancia, ya que $\alpha(1) = 1$ y por lo tanto $A\mathcal{R}A = A$. Para ello, sean $y \in \mathcal{G}$ y $b \in A$. Entonces

$$\begin{aligned} S_yS_y^*bS &= P_y\alpha(Q)^{\frac{1}{2}}SS^*\alpha(Q)^{\frac{1}{2}}P_ybS = P_y\alpha(Q)^{\frac{1}{2}}S\mathcal{L}(\alpha(Q)^{\frac{1}{2}}P_yb) \\ &= P_y\alpha(Q)^{\frac{1}{2}}E(\alpha(Q)^{\frac{1}{2}}P_yb)S = P_y\alpha(Q)E(P_yb)S = P_ybS, \end{aligned}$$

ya que $P_y\alpha(Q)E(P_yb) = P_yb$, pues si $\xi \in \Omega_{\mathcal{A}}$,

$$\begin{aligned} P_y\alpha(Q)E(P_yb)(\xi) &= P_y(\xi)Q(\sigma(\xi))\frac{1}{Q(\sigma(\xi))}\sum_{\sigma(\eta)=\sigma(\xi)} P_y(\eta)b(\eta) \\ &= \delta_{y,\xi_1}\sum_{\eta_2=\xi_2,\eta_3=\xi_3,\ldots} \delta_{y,\eta_1}b(\eta) = \delta_{y,\xi_1}b((y,\xi_2,\xi_3,\ldots)) \\ &= \delta_{y,\xi_1}b(\xi) = (P_yb)(\xi). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{y\in\mathcal{G}} \mathcal{A}(x,y)S_yS_y^*bS = \sum_{y\in\mathcal{G}} \mathcal{A}(x,y)P_ybS = Q_xbS,$$

y por lo tanto $\left(Q_x, \sum_{y\in\mathcal{G}} \mathcal{A}(x,y)S_yS_y^*\right)$ es una redundancia. Esto prueba la afirmación.

Si denotamos por $s_x \in \mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ a la isometría parcial canónica correspondiente a $x \in \mathcal{G}$, la propiedad universal de $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ junto con la identidad probada en la afirmación permiten concluir que existe un único homomorfismo $\phi : \mathcal{O}_{\mathcal{A}} \to A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ que satisface $\phi(s_x) = S_x$ para todo x en $\mathcal{G}$. Vamos a demostrar que ϕ es un isomorfismo, y esto lo haremos construyendo su inversa.

Recordemos que $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ está graduada sobre el grupo libre generado por $\mathcal{G}$, que denotamos por $\mathcal{F}$ (ver [20]). Además, la fibra sobre la unidad puede ser naturalmente identificada con $A = C(\Omega_{\mathcal{A}})$. Vía esta identificación, tenemos que $s_x^*s_x = Q_x$ y $s_xs_x^* = P_x$ para cada x en $\mathcal{G}$.

Definimos $s = \alpha(Q)^{-\frac{1}{2}}\sum_{x\in\mathcal{G}} s_x$, que es un elemento de $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$.

Afirmación: ***para toda f de A, valen las siguientes identidades***

$$sf = \alpha(f)s \quad \text{y} \quad s^*fs = \mathcal{L}(f).$$

Por la estructura de producto cruzado parcial de $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$, se tiene para todos $x \in \mathcal{G}$ y $f \in A$ que $s_xf = \alpha(f)s_x$, de donde se deduce la validez de la primera identidad. Por otro lado, si $f \in A$,

$$s^*fs = \sum_{x,y\in\mathcal{G}} s_x^*\alpha(Q)^{-1}fs_y = \sum_{x\in\mathcal{G}} s_x\alpha(Q)^{-1}fs_x = \mathcal{L}(f),$$

y por ello también es válida la segunda identidad.

Por la propiedad universal de $\mathcal{T}(A,\alpha,\mathcal{L})$, existe un único homomorfismo $\psi : \mathcal{T}(A,\alpha,\mathcal{L}) \to \mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ que es la identidad en (las copias de) A y satisface $\psi(S) = s$.

El resto de la demostración consistirá en probar que ψ induce un homomorfismo $\widetilde{\psi} : A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} \to \mathcal{O}_{\mathcal{A}}$, y que este homomorfismo es el inverso de ϕ. Observemos que si tuviéramos probada la existencia de $\widetilde{\psi}$, necesariamente sería $\widetilde{\psi}\circ\phi = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}}$ y $\phi\circ\widetilde{\psi} = \mathrm{id}_{A\rtimes_{\alpha,\mathcal{L}}\mathbb{N}}$, porque se verifican estas identidades en los generadores.

Por lo tanto, resta ver que ψ induce un homomorfismo en el cociente $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$, es decir, que ψ se anula en el ideal generado por las redundancias $\mathcal{I}(A,\alpha,\mathcal{L})$. La prueba de la siguiente afirmación concluye la demostración del teorema.

Afirmación: $\psi(a-k) = 0$ ***para toda redundancia*** (a,k).

Sea $(a,k) \in A\mathcal{R}A \times ASS^*A$ una redundancia. Observemos que $A\mathcal{R}A = A$ ya que $\alpha(1) = 1$. Como $k \in ASS^*A, \psi(k) \in Ass^*A$. Además,

$$Ass^*A \subseteq \sum_{x,y\in\mathcal{G}} As_x s_y^* A \subseteq \sum_{x,y\in\mathcal{G}} As_x s_y^*.$$

El subespacio $As_x s_y^*$ es la fibra sobre xy^{-1} cuando $x \neq y$, mientras que $\sum_{x\in\mathcal{G}} As_x s_x^* = A$. Por lo tanto, $\sum_{x,y\in\mathcal{G}}$ es cerrado y así existen $k_{x,y} \in A$ para cada par $(x,y) \in \mathcal{G}\times\mathcal{G}$ tales que

$$\psi(k) = \sum_{x,y\in\mathcal{G}} k_{x,y} s_x s_y^*.$$

Como $abS = kbS$ para todo b en A, también es $abS = \psi(k)bS$ para todo b en A, ya que ψ es la identidad en A. Así, para todo b en A se tiene

$$ab\alpha(Q)^{-\frac{1}{2}} \sum_{x\in\mathcal{G}} s_x = \sum_{x,y,z\in\mathcal{G}} k_{x,y} s_x s_y^* b\alpha(Q)^{-\frac{1}{2}} s_z.$$

Poniendo $b\alpha(Q)^{\frac{1}{2}}$ en lugar de b y observando que $s_y^* b s_z = 0$ si $y \neq z$, podemos proyectar en la fibra sobre x para cada x en $\mathcal{G}$ para obtener

$$abs_x = \sum_{y\in\mathcal{G}} k_{x,y} s_x s_y^* b s_y.$$

Tomando z en $\mathcal{G}$ y poniendo $b = P_z$, resulta

$$aP_z s_x = k_{x,z} s_x s_z^* P_z s_z = k_{x,z} s_x s_z^* s_z s_z^* s_z = k_{x,z} s_x Q_z^* = k_{x,z} s_x Q_z.$$

Cuando $x \neq z$, el término de la izquierda es nulo y así $k_{x,z} s_x Q_z s_z^* = 0$. Por lo tanto,

$$\psi(k) = \sum_{x\in\mathcal{G}} k_{x,x} s_x s_x^* = \sum_{x\in\mathcal{G}} k_{x,x} P_x,$$

y entonces $abs_x = k_{x,x} s_x s_x^* b s_x = k_{x,x} P_x b s_x$ para cada x en $\mathcal{G}$. Multiplicando a derecha por s_x^* obtenemos que $abP_x = k_{x,x} bP_x$. Tomando $b = 1$, resulta

$$a = \sum_{x\in\mathcal{G}} aP_x = \sum_{x\in\mathcal{G}} k_{x,x} P_x = \psi(k).$$

Como $\psi(a) = a$, resulta que $\psi(a-k) = 0$, lo que prueba la afirmación. $\square$

Observación 3.3.6. La última afirmación puede probarse usando los resultados de Brownlowe y Raeburn que se presentan en el capítulo 5. En efecto, tenemos que el par $(\psi \circ i_A, \alpha(Q)^{\frac{1}{2}} \sum_{x\in\mathcal{G}} s_x)$ es una representación Toeplitz-covariante de $(A, \alpha, \mathcal{L})$ en $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$, y probar que ψ se anula en el ideal generado por las redundancias es equivalente a probar que la representación anterior es covariante, de acuerdo con la definición 5.2.5. Esto a su vez significa que para todo $a \in K_\alpha = A\mathcal{R}A \cap J(M_{\mathcal{L}}) = J(M_{\mathcal{L}})$ valga la identidad

$$(\psi_{\alpha(Q)^{\frac{1}{2}} \sum_{x\in\mathcal{G}} s_x}, \psi \circ i_A)^{(1)}(\phi(a)) = \psi \circ i_A(a).$$

Demostrémoslo.

Demostración. Sea $a \in J(M_{\mathcal{L}})$. Entonces

$$\psi \circ i_A(a) = \psi\left((\psi_S, i_A)^{(1)}(\phi(a))\right) = (\psi \circ \psi_S, \psi \circ i_A)^{(1)}(\phi(a)).$$

Finalmente, resta observar que $\psi \circ \psi_S = \psi_s$. En efecto,

$$\psi \circ \psi_S(q(b)) = \psi(i_A(b)S) = i_A(b)s = \psi_s(q(b))$$

para todo b en A. $\square$

3.4. Álgebras de grafos finitos como productos cruzados.

En esta sección, mostraremos cómo identificar las álgebras de grafos finitos como productos cruzados por endomorfismos, de forma similar a lo hecho en la sección anterior.

Una matriz $\mathcal{A}$ en $M_n(\{0,1\})$ tiene asociado un grafo dirigido finito $E_{\mathcal{A}}$:

$$E_{\mathcal{A}}^0 = \{1, \dots, n\}; E_{\mathcal{A}}^1 = \{ij : a_{ij} = 1\}; s(ij) = j \text{ y } r(ij) = i.$$

El grafo $E_{\mathcal{A}}$ tiene n vértices y hay una arista del vértice j al vértice i si $\mathcal{A}(i,j) = 1$. Observar que entre dos vértices de $E_{\mathcal{A}}$ hay a lo más un camino (de largo uno) que va de uno a otro, fijada la orientación del camino.

Recíprocamente, si E es un grafo dirigido finito tal que entre dos de sus vértices hay a lo más una arista que los une, fijada la orientación del camino, su matriz de vértices $\mathcal{A}_E$ es una matriz como las de la sección anterior.

Estas correspondencias son claramente biunívocas, es decir, $E_{\mathcal{A}_E} = E$ y $\mathcal{A}_{E_{\mathcal{A}}} = \mathcal{A}$ para matrices $\mathcal{A} \in M_n(\{0,1\})$ y grafos finitos E como los recién descritos.

A continuación definimos el álgebra asociada a un grafo de filas finitas (esto es, tal que a cada vértice llegan finitas aristas) y veremos que el álgebra de Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ asociada a una matriz $\mathcal{A}$ de ceros y unos es isomorfa al álgebra del grafo $E_{\mathcal{A}}$ que ella determina. El lector no familiarizado con la teoría de álgebras de grafos puede encontrar en [18] una presentación completa de sus elementos básicos.

Definición 3.4.1. Un *grafo de filas finitas* es una cuaterna $E = (E^0, E^1, r, s)$, donde E^0 y E^1 son dos conjuntos numerables (los *vértices* y las *aristas*, respectivamente) y $r, s : E^1 \to E^0$ son funciones. Si e es una arista, a $r(e)$ le llamamos el *rango* de e y a $s(e)$ le llamamos la *fuente* de e.

Un vértice v es un *pozo* si $s^{-1}(v) = \emptyset$, y es una *fuente* si $r^{-1}(v) = \emptyset$.

Decimos que un grafo de filas finitas E es *finito* si E^0 es un conjunto finito. Si este es el caso, observar que como E tiene filas finitas, E^1 también debe ser finito.

Definición 3.4.2. Dado un grafo de filas finitas $E = (E^0, E^1, r, s)$, una *E-familia de Cuntz-Krieger* en la C^*-álgebra B es un par de familias $\{\mathcal{S}, \mathcal{P}\}$, donde $\mathcal{P} = \{P_v : v \in E^0\}$ son proyecciones, y $\mathcal{S} = \{S_e : e \in E^1\}$ son isometrías, que satisfacen

$$\begin{aligned} S_e^* S_e &= P_{s(e)} \quad \text{para todo } e \in E^1 \text{ y} \\ P_v &= \sum_{\{e \in E^1 : r(e) = v\}} S_e S_e^* \quad \text{para todo } v \in E^0 \text{ tal que } r^{-1}(v) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

La C^*-álgebra generada por la E-familia de Cuntz-Krieger $\{\mathcal{S}, \mathcal{P}\}$ es

$$C^*(\mathcal{S}, \mathcal{P}) := C^*(\{S_e, P_v : e \in E^1, v \in E^0\}).$$

Teorema 3.4.3. *Sea E un grafo de filas finitas. Entonces existe una C^*-álgebra $C^*(E)$ generada por una E-familia de Cuntz-Krieger $\{s, p\}$, que denominaremos la E-familia de Cuntz-Krieger universal, que satisface que para toda E-familia de Cuntz-Krieger $\{\mathcal{T}, \mathcal{Q}\}$ en una C^*-álgebra B, existe un homomorfismo $\pi_{\mathcal{T},\mathcal{Q}} : C^*(E) \to B$ tal que*

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{T},\mathcal{Q}}(s_e) &= T_e \quad \textit{para todo } e \in E^1 \textit{ y} \\ \pi_{\mathcal{T},\mathcal{Q}}(p_v) &= Q_v \quad \textit{para todo } v \in E^0. \end{aligned}$$

Además, esta C^*-álgebra es esencialmente única: si C es otra C^*-álgebra generada por una familia de Cuntz-Krieger $\{w, r\}$ con la misma propiedad universal que $C^*(E)$, entonces existe un isomorfismo $\phi : C^*(E) \to C$ tal que $\phi(s_e) = w_e$ y $\phi(p_v) = r_v$ para todos $e \in E^1$ y $v \in E^0$.

La C^*-álgebra $C^*(E)$ se denomina *el álgebra (universal) asociada al grafo E*.

Supongamos que E es un grafo que surge de una matriz de ceros y unos $\mathcal{A}$. Entonces E no tiene pozos, y todo vértice $v \in E^1$ es de la forma $s(e)$ para algún $e \in E^1$. Por lo tanto, las condiciones que definen a una E-familia de Cuntz-Krieger se reducen a

$$S_e^* S_e = \sum_{\{f \in E^1 : r(f) = s(e)\}} S_f s_f^*.$$

Indexando los vértices por $\{1, \ldots, n\}$, podemos reescribir esta condición como

$$S_i^* S_i = \sum_{ij : a_{ij} = 1} S_j S_j^* = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{A}(i,j) S_{ij} S_{ij}^* \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, n,$$

que es precisamente la relación que define al álgebra de Cuntz-Krieger asociada a la matriz $\mathcal{A}$. Queda claro entonces que tanto $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ como $C^*(E)$ son las C^*-álgebras universales con respecto a la misma relación, de donde deducimos que son isomorfas.

A través de la identificación $C^*(E) \cong \mathcal{O}_{\mathcal{A}_E}$, concluimos que las álgebras de grafos finitos donde entre dos vértices dados hay a lo más un camino que los une, se pueden escribir como productos cruzados por endomorfismos. Sin embargo, a primera vista, el mismo razonamiento no permite concluir lo mismo para grafos finitos arbitrarios. Para ello, tendremos que invocar nuevos resultados sobre álgebras de grafos.

Definición 3.4.4. Sea $E = (E^0, E^1, r, s)$ un grafo de filas finitas. Definimos su *grafo dual* $\widehat{E} = (\widehat{E^0}, \widehat{E^1}, \widehat{r}, \widehat{s})$ por

$$\widehat{E^0} = E^1; \widehat{E^1} = E^2 := \{ef : e, f \in E^1 \text{ y } r(f) = s(e)\}; \widehat{r}(ef) = e \text{ y } \widehat{s}(ef) = f.$$

El siguiente resultado es consecuencia del teorema de unicidad de Cuntz-Krieger para álgebras de grafos.

Teorema 3.4.5. *Sea E un grafo de filas finitas sin fuentes. Entonces su grafo dual $\widehat{E}$ también es un grafo de filas finitas y además*

$$C^*(\widehat{E}) \cong C^*(E).$$

Observación 3.4.6. Sea E un grafo finito. Es claro que su matriz de vértices $\mathcal{A}_E$ no es una matriz de ceros y unos. Sin embargo, sí lo es su *matriz de aristas* $\mathcal{B}_E$, definida por

$$\mathcal{B}_E(e, f) = \begin{cases} 1, & \text{si } s(e) = r(f); \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Observemos que si $n = |E^1|$, entonces $\mathcal{B}_E \in M_n(\{0, 1\})$.

Observación 3.4.7. Sea E un grafo finito. Entonces el grafo asociado a la matriz de ceros y unos $\mathcal{B}_E$ se identifica con el grafo dual de E, esto es, $E_{\mathcal{B}_E} = \widehat{E}$, que claramente es también un grafo finito.

Teorema 3.4.8. *Sea E un grafo finito sin fuentes. Entonces $C^*(E)$ es isomorfa a un producto cruzado de un álgebra conmutativa por un endomorfismo inyectivo y unital, donde además el operador de transferencia preserva la unidad.*

Demostración. Usando las observaciones y resultados anteriores, obtenemos que

$$C^*(E) \cong C^*(\widehat{E}) \cong \mathcal{O}_{\mathcal{B}_E} \cong C(\Omega_{\mathcal{B}_E}) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N},$$

donde $\Omega_{\mathcal{B}_E}, \alpha$ y $\mathcal{L}$ son como en la sección anterior. $\square$

Observación 3.4.9. Sea E un grafo finito sin fuentes. Denotamos por Ω_E al espacio de los caminos infinitos en E (a este espacio se lo denota por E^∞ o $E^{\leq\infty}$ en [18]), por $\alpha : C(\Omega_E) \to C(\Omega_E)$ al endomorfismo asociado al shift $\sigma : \Omega_E \to \Omega_E$, y $\mathcal{L}$ al operador de transferencia, ambos definidos como en la sección anterior. Rastreando los isomorfismos invocados en la demostración del teorema 3.4.8, obtenemos que $C^*(E)$ es isomorfo al producto cruzado de $C(\Omega_E)$ por α relativo a $\mathcal{L}$.

La observación anterior permite obtener relaciones entre las propiedades combinatorias del grafo E y las algebraicas de $C^*(E) \cong C(\Omega_E) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$, sin pasar por el grafo dual $\widehat{E}$.

En particular, los resultados del último capítulo pueden aplicarse en el caso de las álgebras de grafos para deducir los resultados conocidos (y muchas veces, más generales) que vinculan las propiedades del grafo con las del álgebra asociada a él.

Capítulo 4

Ciertas C^*-álgebras asociadas a correspondencias.

Una correspondencia X sobre una C^*-álgebra A es un A-módulo de Hilbert a derecha junto con una acción a izquierda de A por operadores adjuntables de X. El ejemplo motivador viene de un automorfismo α de A: tomamos $X_A = A_A$, y definimos la acción a izquierda de A por $a \cdot b = \alpha(a)b$, para todos a y b en A.

En [16], Pimsner construyó una C^*-álgebra a partir de una correspondencia X, que denotamos por $\mathcal{O}_X$ y que llamamos *álgebra de Cuntz-Pimsner*, de forma tal que cuando la correspondencia X está dada por un automorfismo α de A como en el párrafo anterior, se tiene que $\mathcal{O}_X = A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$. Pimsner también produjo ejemplos interesantes con correspondencias que no surgen a partir de automorfismos, incluyendo ciertas correspondencias sobre C^*-álgebras conmutativas de dimensión finita para las cuales las correspondientes álgebras $\mathcal{O}_X$ resultan isomorfas a las álgebras de Cuntz-Krieger. Además, el álgebra de Cuntz $\mathcal{O}_n$ es isomorfa a $\mathcal{O}_X$ cuando X es un espacio de Hilbert de dimensión n y la acción a izquierda de $\mathbb{C}$ en X está dada por múltiplos de la identidad.

En este capítulo presentamos esta construcción, además de otras que están íntimamente relacionadas con ella, a saber, el álgebra de Toeplitz y las álgebras de Cuntz-Pimsner relativas asociadas a una correspondencia.

El álgebra de Toeplitz, que denotamos por $\mathcal{T}(X)$, se obtiene como el álgebra universal con respecto a las representaciones de Toeplitz de la correspondencia en cuestión X, donde una representación de Toeplitz de X en una C^*-álgebra B es un morfismo de correspondencias entre X y B_B, esta última con la estructura canónica. Se verifica además que el álgebra de Cuntz-Pimsner de X es isomorfa a un cociente del álgebra de Toeplitz.

Por otro lado, las álgebras de Cuntz-Pimsner relativas son también cocientes del álgebra de Toeplitz, donde el ideal de $\mathcal{T}(X)$ por el que se cocienta depende de un ideal del álgebra A. Cuando este ideal es "máximo", en cierto sentido que quedará claro una vez que se presenten con precisión estas definiciones, el álgebra de Cuntz-Pimsner relativa correspondiente coincide con el álgebra de Cuntz-Pimsner; y cuando el ideal es $\{0\}$, el álgebra de Cuntz-Pimsner relativa coincide con el álgebra de Toeplitz.

4.1. El álgebra de Toeplitz.

A lo largo de esta sección, fijamos una C^*-álgebra A y una correspondencia X sobre A, donde la acción a izquierda $a \cdot x$ está dada por un homomorfismo $\phi : A \to \mathfrak{L}(X)$, es decir, $a \cdot x = \phi(a)x$.

A pesar de que el álgebra de Toeplitz de X admite una definición como álgebra universal con respecto a ciertas representaciones, la construcción en primera instancia es a partir de ciertos operadores adjuntables en el espacio de Fock asociado a X, que definimos a continuación. Luego de obtener esta definición, comprobaremos que esta álgebra efectivamente puede describirse en términos de una propiedad universal, y será ésta la caracterización que usaremos en el resto de este trabajo.

Usando la definición de producto tensorial interno del primer capítulo, definimos $X^{\otimes n}$ por

$$\begin{cases} X \otimes_A X \otimes_A \cdots \otimes_A X, & \text{si } n > 0; \\ A, & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Así, $X^{\otimes n}$ es una correspondencia sobre A de forma natural. La acción a izquierda de A en $X^{\otimes n}$ está dada por el mapa $\phi^{(n)} = \phi \otimes id_{X^{\otimes n-1}}$, es decir,

$$a \cdot (x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n) = (\phi(a)x_1) \otimes x_2 \cdots \otimes x_n,$$

para todo $x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n$ en $X^{\otimes n}$.

Definición 4.1.1. Definimos el *espacio de Fock* asociado a X por $F(X) = \oplus_{n=0}^{\infty} X^{\otimes n}$, que es nuevamente una correspondencia sobre A, donde la acción a izquierda es la acción diagonal; ver la observación .

Definición 4.1.2. Para cada x de X, definimos el *operador de creación* asociado a x, que denotamos por T_x, a través de la matriz

$$T_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ T_x^{(1)} & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & T_x^{(2)} & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix},$$

donde $T_x^{(n)}: X^{\otimes n} \to X^{\otimes n+1}$ está dado por la fórmula $T_x^{(n)}(y) = x \otimes y$, para cada y en $X^{\otimes n}$.

Observación 4.1.3. Es fácil ver que cada $T_x^{(n)}$ es un mapa acotado (por la norma de x) y adjuntable, donde $T_x^{(1)*}(y \otimes z) = \phi^{(n)}(\langle x, y \rangle)z$, para y en X y z en $X^{\otimes n}$. Consultar la sección 4.2 de [1] por una demostración de estos hechos.

En consecuencia, T_x es un operador adjuntable, y su adjunto T_x^* está dado por la matriz

$$T_x = \begin{pmatrix} 0 & T_x^{(1)*} & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & T_x^{(2)*} & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Para cada a en A, denotamos por $\phi_\infty(a)$ al operador en $F(X)$ dado por $\phi_\infty(a) = diag(a, \phi(a), \phi^{(2)}(a), \ldots)$.

Definición 4.1.4. Llamaremos *álgebra de Toeplitz* asociada a X a la C^*-álgebra en $\mathfrak{L}(F(X))$ generada por las familias $\{T_x : x \in X\}$ y $\{\phi_\infty(a) : a \in A\}$, y la denotaremos por $\mathcal{T}(X)$.

Ejemplo 7. Supongamos que $X = A = \mathbb{C}$ y que la acción ϕ es el mapa identidad. En este caso, cada espacio $X^{\otimes n}$ se identifica con $\mathbb{C}$, y por lo tanto resulta $F(X) \cong l^2(\mathbb{N})$. Observar que para todo a en $\mathbb{C}$, es $\phi_\infty(a) = (a, a, \ldots)$, el operador de $l^2(\mathbb{N})$ que multiplica cada entrada por a. En este caso, $\mathcal{T}(X)$ es la C^*-álgebra generada por T_1, ya que cualquier T_x con x en $\mathbb{C}$ es un múltiplo de él. Finalmente, para todo $(x_1, x_2, \ldots)$ en $l^2(\mathbb{N})$, es

$$T_1(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, T_1^{(1)}(x_1), T_1^{(2)}(x_2), \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots),$$

por lo que T_1 es el shift unilateral en $l^2(\mathbb{N})$, y así $\mathcal{T}(X) = \tau$, el álgebra de Toeplitz "usual".

Definición 4.1.5. Una *representación de Toeplitz* de X en una C^*-álgebra B es un par (ψ, π), donde $\psi : X \to B$ es lineal, $\pi : A \to B$ es un homomorfismo y se verifican para todo x, y en X y para todo a en A

1. $\psi(x \cdot a) = \psi(x)\pi(a)$
2. $\psi(x)^*\psi(y) = \pi(\langle x, y\rangle_A)$
3. $\psi(a \cdot x) = \pi(a)\psi(x)$.

Observación 4.1.6. De acuerdo a la definición 1.4.6 de [1], (ψ, π) es una representación de Toeplitz de X en una C^*-álgebra B si y sólo si $(\pi, \psi, \pi) : (A, X, A) \to (B, B, B)$ es un morfismo de correspondencias, donde la estructura en (B, B, B) es la trivial.

Notación. Si (ψ, π) es una representación de Toeplitz de X en una C^*-álgebra B, denotaremos por $C^*(\psi, \pi)$ a la C^*-subálgebra de B generada por la imagen de ψ y la de π: $C^*(\psi, \pi) := C^*(\psi(X \cup \pi(A))$.

Observación 4.1.7. Si (ψ, π) es una representación de Toeplitz de X en la C^*-álgebra B, entonces $\|\psi\| \leq 1$ y $\|\psi\|$ es una isometría si π es inyectiva.

Demostración. Si $x \in X$, tenemos que

$$\|\psi(x)\|^2 = \|\psi(x)^*\psi(x)\| = \|\pi(\langle x, x\rangle_A\| \leq \|\langle x, x\rangle_A\| = \|x\|^2.$$

Esto implica que $\|\psi\| \leq 1$ y como la única desigualdad es una igualdad si y sólo si π es inyectiva, concluimos que $\|\psi\| = 1$ si y sólo si π es inyectiva. $\square$

Proposición 4.1.8. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y (ψ, π) una representación de Toeplitz de X en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Entonces existe un homomorfismo $(\psi, \pi)^{(1)} : \mathfrak{L}(X) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ cuyo espacio esencial es $\overline{\psi(X)\mathcal{H}}$ y además satisface*

1. $(\psi, \pi)^{(1)}(\theta_{x,y}) = \psi(x)\psi(y)^*$ *para todos x, y en X.*
2. $(\psi, \pi)^{(1)}(S)(\psi(x)h) = \psi(S(x))h$ *para todos S en $\mathfrak{L}(X), x$ en X y h en $\mathcal{H}$.*

Demostración. El mapa $X \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido por $(x,h) \mapsto \psi(x)h$ es bilineal, y por lo tanto induce un mapa $U : X \odot_A \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ que satisface $U(x \otimes h) = \psi(x)h$ para cada (x,h) en $X \odot_A \mathcal{H}$. Como

$$\begin{aligned}\langle U(x \otimes h), U(y \otimes k)\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle \psi(x)h, \psi(y)k\rangle_{\mathcal{H}} = \langle h, \psi(x)^*\psi(y)k\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle h, \pi(\langle x,y\rangle_A)k\rangle_{\mathcal{H}} = \langle x \otimes h, y \otimes k\rangle_{X\otimes_A\mathcal{H}},\end{aligned}$$

U se extiende a una isometría $U : X \otimes_A \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ que satisface $U(x \otimes h) = \psi(x)h$ para cada (x,h) en $X \otimes_A \mathcal{H}$.

Si $S \in \mathfrak{L}(X)$, $x \in X$ y $h \in \mathcal{H}$, tenemos

$$U\mathrm{Ind}\pi(S)U^*(\psi(x)h) = U\mathrm{Ind}\pi(S)(x \otimes h) = U(Sx \otimes h) = \psi(Sx)h.$$

Definimos entonces $(\psi,\pi)^{(1)} = \mathrm{Ad}U \circ \mathrm{Ind}\pi$. En virtud del cálculo anterior, el homomorfismo definido satisface la primeraa de las condiciones enumeradas. Además, si $x,y,z \in X$ y $h \in \mathcal{H}$, tenemos

$$(\psi,\pi)^{(1)}(\theta_{x,y})\psi(z)h \;=\; \psi(x \cdot \langle y,z\rangle_A)h = \psi(x)\pi(\langle y,x\rangle_A)h = \psi(x)\psi(y)^*(\psi(z)h),$$

de modo que $(\psi,\pi)^{(1)}(\theta_{x,y})$ y $\psi(x)\psi(y)^*$ coinciden en $\overline{\psi(X)\mathcal{H}}$. Para demostrar la proposición, bastará ver que en $\overline{\psi(X)\mathcal{H}}^{\perp}$ ambos operadores son nulos.

Si k es ortogonal a $\overline{\psi(X)\mathcal{H}}$, entonces $U^*(k) = 0$ y por lo tanto $(\psi,\pi)^{(1)}(\theta_{x,y})k = 0$, así que resta ver que $\psi(x)\psi(y)^*k = 0$. El siguiente cálculo, válido para todo h en $\mathcal{H}$, termina la demostración:

$$\langle \psi(x)\psi(y)^*k, h\rangle_{\mathcal{H}} = \langle k, \psi(y)\psi(x)^*h\rangle_{\mathcal{H}} = 0.$$

□

Corolario 4.1.9. *Sea (ψ,π) una representación de Toeplitz de X en una C^*-álgebra B. Entonces existe un homomorfismo $(\psi,\pi)^{(1)} : \mathcal{K}(X) \to B$ que satisface para todos x,y en X, T en $\mathcal{K}(X)$,*

1. $(\psi,\pi)^{(1)}(\theta_{x,y}) = \psi(x)\psi(y)^*$
2. $(\psi,\pi)^{(1)}(T)\psi(x) = \psi(T(x))$.

Demostración. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\iota : B \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una representación fiel. Tomando $\psi' = \iota\circ\psi, \pi' = \iota\circ\pi$, se tiene que (ψ',π') es una representación de Toeplitz de X en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, que por la proposición anterior induce un homomorfismo $(\psi',\pi')^{(1)} : \mathfrak{L}(X) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ el cual satisface para todos x,y en X,

$$(\psi',\pi')^{(1)}(\theta_{x,y}) = \psi'(x)\psi'(y)^* = \iota(\psi(x)\psi(y)^*).$$

En particular, $(\psi',\pi')^{(1)}(\mathcal{K}(X)) \subseteq \iota(B)$ y por lo tanto el homomorfismo $(\psi,\pi)^{(1)} : \mathcal{K}(X) \to B$ definido como

$$(\psi,\pi)^{(1)} = \iota^{-1} \circ (\psi',\pi')^{(1)}$$

satisface las condiciones deseadas. □

Observación 4.1.10. En el corolario anterior, la primeraa de las condiciones determina por sí sola al homomorfismo $(\psi,\pi)^{(1)}$, que necesariamente verificará la segunda. De todas formas elegimos presentar la segunda condición de forma explícita para la conveniencia del lector, pues será usada reiteradas veces.

Observación 4.1.11. Sean (ψ, π) una representación de Toeplitz de X en B, C una C^*-álgebra y $\rho : B \to C$ un homomorfismo. Entonces $(\rho \circ \psi, \rho \circ \pi)$ es una representación de Toeplitz de X en C y además

$$(\rho \circ \psi, \rho \circ \pi)^{(1)}(\theta_{x,y}) = \rho \circ \psi(x)\rho \circ \pi(y)^* = \rho(\psi(x)\psi(y)^*) = \rho \circ (\psi, \pi)^{(1)}(\theta_{x,y}).$$

Como el conjunto $\{\theta_{x,y} : x, y \in X\}$ genera linealmente un subespacio denso de $\mathcal{K}(X)$ y los homomorfismos $(\rho \circ \psi, \rho \circ \pi)^{(1)}$ y $\rho \circ (\psi, \pi)^{(1)}$ son continuos y coinciden en él, deducimos que $(\rho \circ \psi, \rho \circ \pi)^{(1)} = \rho \circ (\psi, \pi)^{(1)}$.

4.1.1. Propiedad universal del álgebra de Toeplitz.

El objetivo de este apartado es describir el álgebra de Toeplitz recién definida como un álgebra universal con respecto a las representaciones de Toeplitz. El principal resultado es el teorema 4.1.23, que brinda una definición alternativa y abstracta del álgebra de Toeplitz asociada a la correspondencia X. La principal herramienta en las pruebas de estos resultados será la existencia de una acción canónica del círculo $\mathbb{T}$ por automorfismos de $\mathcal{T}(X)$.

Denotamos por $\mathcal{P}_X$ a la $*$-álgebra universal generada por una familia $\{S_x : x \in X\}$ y A sujetos a las relaciones

1. $\alpha S_x + \beta S_y = S_{\alpha x + \beta y}$ para todos α, β en $\mathbb{C}$ y x, y en X.
2. $S_x a = S_{x \cdot a}$ y $a S_x = S_{\phi(a)x}$ para todos a en A y x en X.
3. $S_x^* S_y = \langle x, y \rangle_A$ para todos x, y en X.

Definición 4.1.12. Cada elemento de $\mathcal{P}_X$ es una suma finita de *palabras*, donde por palabra entendemos un producto finito de elementos de la forma a, S_x, S_y^* con a en A, x, y en X, que asumimos *irreducible*, en el sentido de que no puede ser escrita como la suma de palabras con menor cantidad de factores. El *largo* de una palabra será la (mínima) cantidad de factores.

A partir de las relaciones que definien a $\mathcal{P}_X$, es claro que cada palabra tiene la forma

$$S_{x_1} \cdots S_{x_k} S_{y_1}^* \cdots S_{y_l}^*$$

con $k, l \geq 0$ y $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l$ en X, con la convención de que tanto en el caso de $k = 0$ o $l = 0$, se tiene un elemento de A.

Definición 4.1.13. Definimos el *grado* de una palabra en $\mathcal{P}_X$ de la siguiente forma:

- el grado de un elemento a de A es 0;
- el grado de S_x para x en X es 1;
- el grado de S_y^* para y en X es -1; y
- el grado de una palabra es la suma de los grados de sus factores.

Observación 4.1.14. El grado de la palabra $S_{x_1} \cdots S_{x_k} S_{y_1}^* \cdots S_{y_l}^*$ es $k - l$.

Como las relaciones que definien $\mathcal{P}_X$ son homogéneas en el sentido de que involucran sólo palabras del mismo grado, tiene sentido definir para cada entero n el espacio vectorial de los elementos homogéneos de $\mathcal{P}_X$ de grado n, que denotaremos por $(\mathcal{P}_X)_n$. Es claro que cada elemento de $\mathcal{P}_X$ es suma de elementos homogéneos.

Observación 4.1.15. Para cada n en $\mathbb{Z}$, el espacio $(\mathcal{P}_X)_n$ consiste en los elementos de la forma

$$\sum_{i\in F} S_{x_1^i}\cdots S_{x_{k_i}^i} S_{y_1^i}^* \cdots S_{y_{l_i}^i}^*,$$

donde F es un conjunto finito de índices y $k_i - l_i = n$ para cada i en F.

Observación 4.1.16. Para cada z en §, los elementos de la forma zS_x satisfacen las mismas condiciones que los S_x, y por lo tanto existe una acción por automorfismos $\lambda : \mathbb{T} \to \operatorname{Aut}(\mathcal{P}_X)$ que actúa en los generadores por

$$\lambda_z(a) = a \quad \text{y} \quad \lambda_z(S_x) = zS_x,$$

para cada z en $\mathbb{T}$, a en A y x en X. Además,

$$(\mathcal{P}_X)_n = \{\xi \in \mathcal{P}_X : \lambda_z(\xi) = z^n\xi \text{ para todo } z \in \mathbb{T}\},$$

es decir, $(\mathcal{P}_X)_n$ coincide con el subespacio propio asociado a $z \mapsto z^n$.

Por definición, cada representación π de A en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ junto con operadores $\{s_x\}_{x\in X}$ de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ satisfaciendo las condiciones (1),(2) y (3) en la definición de $\mathcal{P}_X$, extiende a una representación de $\mathcal{P}_X$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que satisface $a \mapsto \pi(a)$ y $S_x \mapsto s_x$.

Dotamos a $\mathcal{P}_X$ con la seminorma obtenida al tomar supremos de las normas en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para todas las representaciones $\pi : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ como en el párrafo anterior. Este supremo es finito ya que

$$\|s_x\|^2 = \|s_x^* s_x\| = \|\pi(\langle x, x\rangle_A)\| \leq \|x\|_X^2,$$

para todo x en X.

La completación del cociente de $\mathcal{P}_X$ por los vectores de norma nula es una C^*-álgebra que denotamos por $\widetilde{\mathcal{P}_X}$. El objetivo será mostrar que esta álgebra coincide con $\mathcal{T}(X)$.

Observemos que $\widetilde{\mathcal{P}_X}$ satisface la siguiente propiedad universal. Si B es una C^*-álgebra, $\pi : A \to B$ un homomorfismo y $\{t_x\}_{x\in X}$ es una familia de elementos de B que satisfacen

1. $\alpha s_x + \beta s_y = s_{\alpha x+\beta y}$ para todos α, β en $\mathbb{C}$ y x, y en X.

2. $s_x\pi(a) = s_{x\cdot a}$ y $\pi(a)s_x = s_{\phi(a)x}$ para todos a en A y x en X.

3. $s_x^* s_y = \pi(\langle x, y\rangle_A)$ para todos x, y en X,

entonces existe una única extensión $\pi \otimes t : \widetilde{\mathcal{P}_X} \to B$ de π que satisface $S_x \mapsto s_x$ para todo x de X.

La acción $\lambda : \mathbb{T} \to \operatorname{Aut}(\mathcal{P}_X)$ extiende a una acción de $\mathbb{T}$ por automorfismos de $\widetilde{\mathcal{P}_X}$, que también denotamos por λ. Además, si denotamos por dz a la medida de Haar normalizada en $\mathbb{T}$, entonces la fórmula

$$a \mapsto \int_{\mathbb{T}} \lambda_z(a)dz \ : \widetilde{\mathcal{P}_X} \to \widetilde{\mathcal{P}_X}$$

define una esperanza condicional fiel sobre el álgebra de puntos fijos de λ. Esta álgebra es entonces la clausura en $\widetilde{\mathcal{P}_X}$ del espacio de las sumas finitas de elementos de la forma

$$S_{x_1} \cdots S_{x_m} S_{y_1}^* \cdots S_{y_m}^*,$$

para $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m$ en X, y m en $\mathbb{N}$.

A continuación, mostraremos que esta álgebra coincide con el álgebra de puntos fijos del álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}(X)$. Para ello, haremos uso del siguiente lema.

Lema 4.1.17. *Sean $B \subseteq C$ dos C^*-álgebras y $E \subseteq B$ un subespacio cerrado que satisface $xb \in E$ para todo x en E y b en B, y $x^*y \in B$ para todos x, y en E. Entonces*

1. *Dotando a E con el producto interno $\langle x, y \rangle_B = x^*y$ y la multiplicación a derecha por elementos de B, obtenemos un módulo de Hilbert a derecha cuya norma coincide con la norma de C.*

2. *Los elementos S de C tales que $Sx, S^*x \in E$ para todo x en E definen, vía la multiplicación a izquierda, elementos de $\mathfrak{L}(E)$. En particular, los elementos de la forma xy^* para x, y en E definen elementos en $\mathcal{K}(E)$.*

3. *El conjunto $\{xy^* : x, y \in E\} \subseteq C$ genera linealmente un subespacio cuya clausura es isomorfa a $\mathcal{K}(E)$, es decir,*

$$\overline{\operatorname{span}}(\{xy^* : x, y \in E\}) \cong \mathcal{K}(E).$$

Demostración. Los dos primeros puntos son inmediatos. Observar que $xy^* = \theta_{x,y} \in \mathcal{F}(E)$. Para probar el tercer punto, alcanza conver que la norma en C de un elemento de la forma $\sum_{i=1}^n x_i y_i^* = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i^*$ coincide con su norma como operador en $\mathfrak{L}(E)$. Esto se debe a que ambas normas coinciden con la norma del elemento de ${}_n(A)$ dado por la raíz del producto de las matrices positivas $(x_i^* x_j)_{i,j=1}^n$ y $(y_i^* y_j)_{i,j=1}^n$. UNA REFERENCIA? $\square$

Observemos que existe un homomorfismo natural de $\widetilde{\mathcal{P}_X}$ al álgebra de Toeplitz de X que satisface $\mu(a) = \phi_\infty(a)$ para todo a en A, y $\mu(S_x) = T_x$. Como A es (vía ϕ_∞) una subálgebra de $\mathcal{T}(X)$ contenida en el rango de μ, A también debe ser una subálgebra de $\widetilde{\mathcal{P}_X}$. El lema anterior aplicado a los elementos $\{T_x\}_{x \in X}$ implica que la clausura en $\widetilde{\mathcal{P}_X}$ de las sumas finitas de elementos de la forma $S_x S_y^*$ con x, y en X es una C^*-álgebra isomorfa a $\mathcal{K}(X)$.

Más en general, para cada n en $\mathbb{N}$, la clausura en $\widetilde{\mathcal{P}_X}$ de las sumas finitas de elementos de la forma $S_{x_1} \cdots S_{x_n}$ para $x_1, \ldots, x_n$ es un A-módulo de Hilbert isomorfo a $X^{\otimes n}$. De nuevo por el lema anterior, la clausura del espacio generado por los elementos de la forma

$$S_{x_1} \cdots S_{x_n} S_{y_1}^* \cdots S_{y_n}^*,$$

para $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ en X, es isomorfo a $\mathcal{K}(E^{\otimes n})$. Más aún, bajo estas identificaciones, el producto en $\widetilde{\mathcal{P}_X}$ de dos elementos $a \in \mathcal{K}(E^{\otimes n})$ y $b \in \mathcal{K}(E^{\otimes n+m})$ es el elemento $a \otimes 1b \in \mathcal{K}(E^{\otimes n+m})$.

Necesitamos del siguiente lema para obtener el resultado deseado.

Lema 4.1.18. *Sean B y C dos C^*-álgebras y $\pi : B \to M(C)$ un homomorfismo, donde $M(C)$ es el álgebra de multiplicadores de C. Entonces la C^*-álgebra universal generada por B y C sujetos a las relaciones $bc = \pi(b)c$ y $cb = c\pi(b)$ es (isomorfa a) $B \oplus C$ con el producto dado por*

$$(b, c) \cdot (b', c') = (bb', c\pi(b') + \pi(b)c' + cc'),$$

para todos b, b' en B y c, c' en C.

Si además E, F son dos módulos de Hilbert sobre la C^*-álgebra D, y $\sigma_1 : B \to \mathfrak{L}(E)$ y $\sigma_2 : M(C) \to \mathfrak{L}(F)$ son dos representaciones fieles, entonces $\sigma : (B \oplus C, \cdot) \to \mathfrak{L}(E \oplus F)$ dada por

$$\sigma(b, c)(x \oplus y) = \sigma_1(b)x \oplus \sigma_2(\pi(b) + c)y$$

para todos b en B, c en C, x en E, y en C, es una representación fiel de tal álgebra universal en $E \oplus F$.

Proposición 4.1.19. *El mapa natural $\mu : \widetilde{\mathcal{P}_X} \to \mathcal{T}(X)$ es un isomorfismo.*

Demostración. Dado que μ intercambia las acciones canónicas de $\widetilde{\mathcal{P}_X}$ y $\mathcal{T}(X)$ y la esperanza condicional de $\widetilde{\mathcal{P}_X}$ sobre los puntos fijos de λ es fiel, alcanza conprobar que la restricción de μ a dicha álgebra es isométrico. Así, basta ver que la C^*-álgebra generada en $\mathcal{T}(X)$ por las álgebras $\mathcal{K}(X^{\otimes n})$, con n en $\mathbb{N}$, es la C^*-álgebra universal generada por $\mathcal{K}(X^{\otimes n})$ sujetos a las relaciones

$$ab = a \otimes 1b; \quad ba = ba \otimes 1,$$

para cada a en $\mathcal{K}(X^{\otimes n})$ y b en $\mathcal{K}(X^{\otimes n+m})$ y todos n, m en $\mathbb{N}$. Por último, esto se deduce de aplicar inductivamente el lema anterior. $\square$

Como corolario de la proposición anterior, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.1.20. *Sea (ψ, π) una representación de Toeplitz de $\mathcal{T}(X)$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces el mapa*

$$\begin{cases} T_x \mapsto \psi(x), & \text{si } x \in X; \\ \phi_\infty(a) \mapsto \pi(a), & \text{si } a \in A. \end{cases}$$

se extiende de forma única a una representación de $\mathcal{T}(X)$ en $\mathcal{H}$, que denominaremos la forma integrada *de (ψ, π) y la denotaremos por $\psi \times \pi$.*

Recíprocamente, si $\sigma : \mathcal{T}(X) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una representación, definimos los mapas $\psi_\sigma : X \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\pi_\sigma : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ por $\psi_\sigma(x) = \sigma(T_x)$ para cada x en X, y $\pi_\sigma(a) = \sigma(\phi_\infty(a))$ para cada a en A. Entonces $(\psi_\sigma, \pi_\sigma)$ es una representación de Toeplitz de X en $\mathcal{H}$, a la que llamamos la forma desintegrada *de σ.*

Además, estas correspondencias son inversas una de la otra; es decir, $(\psi_{\psi\times\pi}, \pi_{\psi\times\pi}) = (\psi, \pi)$ para cada representación de Toeplitz (ψ, π) de X en $\mathcal{H}$, y $\psi_\sigma \times \pi_\sigma = \sigma$ para cada representación $\sigma : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Definición 4.1.21. Dados un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y una representación de Toeplitz (ψ, π) de X en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, decimos que (ψ, π) es una representación

- *no degenerada*, si $C^*(\psi, \pi)$ actúa en $\mathcal{H}$ de forma no degenerada. Es decir, si $C^*(\psi, \pi) \cdot \mathcal{H} = \mathcal{H}$.

- *cíclica*, si $C^*(\psi(X), \pi(A))$ actúa cíclicamente en $\mathcal{H}$, esto es, si existe ξ en $\mathcal{H}$ tal que $C^*(\psi, \pi)\xi$ es denso en $\mathcal{H}$.

Lema 4.1.22. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y (ψ, π) una representación de Toeplitz de X en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Entonces (ψ, π) es la suma de la representación nula y una colección de representaciones cíclicas.*

Demostración. Sea $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ la proyección ortogonal sobre $\mathcal{K} := \overline{C^*(\psi, \pi) \cdot \mathcal{H}}$. Entonces $(P\psi, P\pi)$ es una representación de Toeplitz no degenerada de X en $\mathcal{K}$, y $((I-P)\psi, (I-P)\pi)$ es la representación de Toeplitz nula. Claramente, (ψ, π) es la suma de estas dos representaciones. Por lo tanto, resta ver que toda representación no degenerada se descompone como la suma de una colección de representaciones cíclicas. Usando el Lema de Zorn se prueba que $\mathcal{K}$ se descompone como la suma de ciertos subespacios, en cada uno de los cuales $C^*(\psi, \pi)$ actúa cíclicamente. Restringiendo $(P\psi, P\pi)$ a cada uno de estos subespacios obtenemos la descomposición deseada. $\square$

Teorema 4.1.23. *Existe una representación de Toeplitz (i_X, i_A) de X en $\mathcal{T}(X)$ que satisface las siguientes propiedades.*

1. *Para toda representación de Toeplitz (ψ, π) de X en una C^*-álgebra B, existe un homomorfismo $\psi \times \pi$ de $\mathcal{T}(X)$ en B que hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathcal{T}(X) \arrow[d, "\psi\times\pi"] & X \arrow[l, "i_X"'] \arrow[dl, "\psi"] \\ & B & \end{tikzcd}.$$

2. *El álgebra $\mathcal{T}(X)$ está generada como C^*-álgebra por $i_X(X) \cup i_A(A)$, es decir, $\mathcal{T}(X) = C^*(i_X(X) \cup i_A(A))$.*

La terna $(\mathcal{T}(X), i_X, i_A)$ es esencialmente única: si (B, i'_X, i'_A) tiene propiedades similares, entonces existe un isomorfismo $\theta : \mathcal{T}(X) \to B$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "i'_A"'] & \mathcal{T}(X) \arrow[d, "\theta"] & X \arrow[l, "i_X"'] \arrow[dl, "i'_X"] \\ & B & \end{tikzcd}.$$

Además, los mapas i_A, i_X son inyectivos y existe una acción canónica fuertemente continua $\gamma : \mathbb{T} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{T}(X))$ que satisface

- $\gamma_z(i_A(a)) = i_A(a)$
- $\gamma_z(i_X(x)) = z i_X(x)$

para cada z en $\mathbb{T}, a$ en A y x en X.

Demostración. El camino para probar este teorema será el siguiente. Primero construiremos una C^*-álgebra $\mathcal{T}(X)'$ que satisface las propiedades universales enunciadas y construiremos en ella una acción canónica fuertemente continua como la del enunciado. Luego, verificaremos que $(\mathcal{T}(X), T, \phi_\infty)$ es otra terna que satisface las mismas propiedades. La unicidad de $\mathcal{T}(X)'$ implicará que $\mathcal{T}(X) \cong \mathcal{T}(X)'$, y así usaremos la definición de $\mathcal{T}(X)$ para concluir que i_X e i_A son inyectivos.

Sea S un conjunto[1] de representaciones de Toeplitz cíclicas de X tal que toda representación cíclica de X es unitariamente equivalente a un elemento de S. Podemos suponer que cada representación (ψ, π) en S actúa sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\psi,\pi}$. Sean

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \bigoplus_{(\psi,\pi)\in S} \mathcal{H}_{\psi,\pi} \\ i_X &= \bigoplus_{(\psi,\pi)\in S} \psi \\ i_A &= \bigoplus_{(\psi,\pi)\in S} \pi. \end{aligned}$$

Observar que la segunda suma tiene sentido porque cada ψ es contractiva, en virtud de la observación 4.1.7.

Es claro que (i_X, i_A) es una representación de Toeplitz de X en $\mathcal{T}(X)' := C^*(i_X, i_A)$. Así, la segunda condición del enunciado se verifica por construcción.

Verifiquemos la primera condición del enunciado. Sea (ψ, π) una representación de Toeplitz de X en la C^*-álgebra B. Por el lema 4.1.22, existen un conjunto I y representaciones de Toeplitz cíclicas $\{(\widetilde{\psi}_i, \widetilde{\pi}_i) : i \in I\}$ de X en B, tales que

$$(\psi, \pi) = (0, 0) \oplus \bigoplus_{i\in I} (\widetilde{\psi}_i, \widetilde{\pi}_i).$$

Para cada $i \in I$, podemos tomar $(\psi_i, \pi_i) \in S$ de modo que $(\widetilde{\psi}_i, \widetilde{\pi}_i)$ sea unitariamente equivalente a (ψ, π) (este hecho lo abreviamos como $(\widetilde{\psi}_i, \widetilde{\pi}_i) \sim_u (\psi_i, \pi_i)$). Así,

$$(\psi, \pi) \sim_u (0, 0) \oplus \bigoplus_{i\in I} (\psi_i, \pi_i),$$

donde algunos sumandos pueden estar repetidos. Podemos expresar la igualdad anterior introduciendo multiplicidades (que son enteros no negativos que se definen de la forma que uno espera):

$$(\psi, \pi) \sim_u (0, 0) \oplus \bigoplus_{(\psi,\pi)\in S} k_{(\psi,\pi)}(\psi, \pi).$$

Definimos $\psi \times \pi : \mathcal{T}(X)' \to B$ como el homomorfismo que en el subespacio $\mathcal{T}(X)' \cap \mathcal{H}_{(\psi,\pi)}$ es $k_{(\psi,\pi)}$ veces el unitario por el cual se conjugó a $(\widetilde{\psi}_i, \widetilde{\pi}_i)$ para obtener (ψ_i, π_i).

La unicidad se prueba usando la propiedad universal: si (B, i'_X, i'_A) es una terna con las mismas propiedades que $(\mathcal{T}(X)', i_X, i_A)$, entonces la primeraa de las tres propiedades que definen a $\mathcal{T}(X)'$ afirma la existencia de un mapa $\theta : \mathcal{T}(X)' \to B$ que hace conmutativo el diagrama al que se refiere la unicidad. Resta ver que es un isomorfismo. Si $\theta' : B \to \mathcal{T}(X)'$

[1] En principio el Axioma de Elección nos permite obtener una *clase* S de representantes de cada clase de equivalencia unitaria para las representaciones de Toeplitz cíclicas. Sin embargo, un argumento más elaborado acotando la dimensión del espacio de Hilbert donde estas representaciones pueden actuar permite concluir que la clase S es de hecho un conjunto.

es el mapa asociado a la terna (B, i'_X, i'_A), se tiene que θ y θ' son inversas entre sí. Para ello, basta observar que θ y θ' se intercambian los generadores de $\mathcal{T}(X)'$ y B respectivamente.

Verifiquemos que $(\mathcal{T}(X), T, \phi_\infty)$ satisface las mismas propiedades que $(\mathcal{T}(X)', i_X, i_A)$, para concluir que $\mathcal{T}(X) \cong \mathcal{T}(X)'$. Es claro que (T, ϕ_∞) es una representación de Toeplitz de X en $\mathcal{T}(X)$, y $\mathcal{T}(X) = C^*(T, \phi_\infty)$ por definición. Por último, la segunda de las propiedades universales que definen a $\mathcal{T}(X)'$ es precisamente el contenido del teorema 4.1.20.

Para probar que i_X e i_A son mapas inyectivos, alcanza con probar que T y ϕ_∞ lo son. Para esto último, basta con observar que la restricción de ϕ_∞ al primer sumando de $F(X)$, que es A, es inyectiva y por lo tanto ϕ_∞ es ella misma inyectiva. Como (T, ϕ_∞) es una representación de Toeplitz con ϕ_∞ inyectiva, resulta que T es una isometría y en particular inyectiva.

Probemos la existencia de la acción canónica. Si $z \in \mathbb{T}$, es fácil verificar que la terna $(\mathcal{T}(X), zi_X, i_A)$ verifica las condiciones enumeradas en la unicidad (el homomorfismo $\overline{\psi \times \pi}$ para esta terna es $\overline{z}\psi \times \pi$, donde $\psi \times \pi$ es el homomorfismo correspondiente a la terna $(\mathcal{T}(X), i_X, i_A)$). Por lo tanto, existe un isomorfismo $\gamma_z : \mathcal{T}(X) \to \mathcal{T}(X)$ que satisface $\gamma_z(i_X(x)) = zi_X(x)$ para todo x en X y $\gamma_z(i_A(a)) = i_A(a)$ para todo a en A. Como $\gamma_{\overline{z}} = \gamma_{z^{-1}} = (\gamma_z)^{-1}$, obtenemos un homomorfismo de grupos $\gamma : \mathbb{T} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{T}(X))$ que satisface $\gamma_z \circ i_X = zi_X$ y $\gamma_z \circ i_A = i_A$ para todo z en $\mathbb{T}$.

Por último, la continuidad de esta acción se prueba de forma totalmente análoga a lo hecho en 2.3.4. □

Observación 4.1.24. La representación de Toeplitz universal (i_X, i_A) es, a menos de un isomorfismo, la representación (T, ϕ_∞). Sin embargo, siempre que sea posible utilizaremos la representación (i_X, i_A) junto con la propiedad universal que define al álgebra de Toeplitz de X, en lugar de la forma concreta con la que la definimos en un principio.

4.2. Álgebras de Cuntz-Pimsner relativas.

Además del álgebra de Toeplitz de una correspondencia, otra papel fundamental en la teoría es jugado por una generalización del álgebra de Cuntz-Krieger, que fue definida por Pimsner y que llamamos álgebra de Cuntz-Pimsner. Para definirla usaremos en primera instancia la expresión concreta del álgebra de Toeplitz. Sin embargo, posteriormente probaremos una proposición similar al teorema 4.1.23 que nos permitirá trabajar solamente con propiedades universales sin tener que recurrir en cada instancia al espacio de Fock asociado a la correspondencia.

A lo largo de esta sección, fijamos una C^*-álgebra A y una correspondencia X sobre A, donde la acción a izquierda $a \cdot x$ está dada por un homomorfismo $\phi : A \to \mathfrak{L}(X)$, es decir, $a \cdot x = \phi(a)x$.

Observación 4.2.1. Para cada N en $\mathbb{N}$, la suma directa finita $X^N = \oplus_{n=0} X^{\otimes n}$ es un subespacio de $F(X)$, y podemos ver a $\mathfrak{L}(X^N)$ como una subálgebra de $\mathfrak{L}(F(X))$. Concretamente, si P_N es la proyección de $F(X)$ sobre X^N, entonces P_N es un elemento de $\mathfrak{L}(F(X))$ y $\mathfrak{L}(X^N)$ se identifica con $P_N \mathfrak{L}(F(X)) P_N$.

Observación 4.2.2. Si B es la C^*-subálgebra de $\mathfrak{L}(F(X))$ generada por $\{\mathfrak{L}(X^N) : N \in \mathbb{N}\}$, entonces los elementos de $\mathcal{T}(X)$ actúan como multiplicadores de B, es decir, $\mathcal{T}(X) \subseteq M(B)$.

Definición 4.2.3. El *álgebra de Cuntz-Pimsner* asociada a X es la imagen de $\mathcal{T}(X)$ en el álgebra $M(B)/B$.

Observación 4.2.4. Como A es un sumando directo de $F(X)$ y $\phi_\infty|_A$ es la multiplicación, se tiene que $\phi_\infty|_A$ es inyectiva y por lo tanto ϕ_∞ es ella misma inyectiva. Así, el mapa

$$\theta_{x,y} = x \otimes y^* \mapsto T_x T_y^*$$

es una representación fiel de $\mathcal{K}(X)$ en $\mathfrak{L}(F(X))$. De esta forma podemos concebir a $\mathcal{K}(X)$ isométricamente contenido en $\mathcal{T}(X) \subseteq \mathfrak{L}(F(X))$.

Con el mismo argumento se muestra que $\mathcal{K}(X^{\otimes n})$ está contenido en $\mathcal{T}(X)$ para todo $n \geq 1$, y cada representación de Toeplitz de $X^{\otimes n}$ induce una representación de $\mathcal{K}(X^{\otimes n})$.

Como ϕ no es necesariamente inyectiva, los espacios $X^{\otimes n}$ podrían reducirse a $\{0\}$ desde algún punto. La siguiente proposición proporciona algunas equivalencias para que esto ocurra.

Definimos $\mathcal{N}_0 = A; \mathcal{N}_1 = \overline{\langle X, \phi(A)X\rangle} = \overline{\langle X, \phi(\mathcal{N}_0)X\rangle}$. Inductivamente, sea $\mathcal{N}_{k+1} = \overline{\langle X, \mathcal{N}_k X\rangle}$. Es claro que cada $\mathcal{N}_k$ es un ideal de A, y que forman una sucesión decreciente.

Proposición 4.2.5. *Para n en $\mathbb{N}$, las siguientes afirmaciones son equivalente:*

1. $X^{\otimes n} = \{0\}$.
2. $\mathcal{N}_{n-1}$ *está contenido en el núcleo de* ϕ.
3. $\mathcal{N}_n = \{0\}$.

Demostración. Sean $x = x_1 \otimes x_2$ y $y = y_1 \otimes y_2$ en $X^{\otimes n}$, con x_1, y_1 en $X^{\otimes n-1}$ y x_2, y_2 en X. Entonces

$$\langle x, y\rangle_{\otimes n} = \langle x_2, \phi(\langle x_1, y_1\rangle_{E^{\otimes n-1}})y_2\rangle_X.$$

Por lo tanto,

$$\overline{\langle X^{\otimes n}, X^{\otimes n}\rangle_{X^{\otimes n}}} = \overline{\langle X, \phi(\mathcal{N}_{n-1})X\rangle_X} = \mathcal{N}_n.$$

Así, $X^{\otimes n} = \{0\}$ si y sólo si $\mathcal{N}_n = \{0\}$. Además, esto ocurre si y sólo si $\overline{\langle X, \phi(\mathcal{N}_{n-1})X\rangle_X} = \{0\}$, esto es, si y sólo si $\phi(\mathcal{N}_{n-1}) = 0$, ya que si a es un elemento de A, entonces $\phi(a) = 0$ si y sólo si $\langle \xi, \phi(a)\eta\rangle_X = 0$ para todos ξ, η en X. $\square$

Denotamos por $J(X)$ al ideal de A dado por $J(X) = \phi^{-1}(\mathcal{K}(X))$. Si K es otro ideal de A contenido en $J(X)$, escribimos $\mathcal{I}(K, X)$ para denotar al ideal de $\mathcal{T}(X)$ generado por $\phi_\infty(K)P_0$, donde P_0 es la proyección de $\mathfrak{L}(F(X))$ sobre el primer sumando de $F(X)$, que es el álgebra A.

Para que esta definición tenga sentido, hay que verificar que $\phi_\infty(K)P_0$ es un elemento de $\mathcal{T}(X)$. El siguiente lema aclara este punto.

Lema 4.2.6. *Sean K un ideal de $J(X)$, y a en K. Entonces*

1. *Si $\phi(a) = \lim_n \sum_{i\in I_n} \xi_{i,n} \otimes \eta_{i,n}^*$ y $T_n := \sum_{i\in I_n} T_{\xi_{i,n}} T_{\eta_{i,n}}^*$, donde cada I_n es un conjunto finito de índices, entonces*

$$\lim_n T_n = \phi_\infty(a) - \phi_\infty(a)P_0.$$

2. $\phi_\infty(K)P_0$ es un elemento de $\mathcal{T}(X)$.

Demostración. Observemos que la segunda afirmación es consecuencia de la primeraa, ya que tanto $\phi_\infty(a)$ como $\lim_n T_n$ son elementos de $\mathcal{T}(X)$.

Dado $\epsilon > 0$, sean m en $\mathbb{N}$ y $b = \sum_{j=1}^m \theta_{\xi_j,\eta_j}$ tal que $\|\phi_\infty(a) - b\| < \epsilon$. Definiendo $T = \sum_{j=1}^m T_{\xi_j} T_{\eta_j}^* \in \mathcal{T}(X)$, tenemos que

$$\begin{aligned} T(a_0 \oplus \zeta^{(1)} \oplus \zeta^{(2)} \oplus \cdots) &= b \cdot \zeta^{(1)} \oplus \big((b \cdot \zeta_1^{(2)}) \otimes \zeta_2^{(2)}\big) \oplus \cdots \\ &= \Big(\phi(a) \cdot \zeta^{(1)} \oplus (\phi(a) \cdot \zeta_2^{(2)}) \oplus \cdots\Big) \\ &\quad - \Big((\phi(a) - b) \cdot \zeta^{(1)} \oplus (\phi(a) - b)\zeta_1^{(2)} \otimes \zeta_2^{(2)} \oplus \cdots\Big). \end{aligned}$$

El primer sumando del último término es $\phi_\infty(a) - \phi_\infty(a)P_0$ actuando en $a_0 \oplus \zeta^{(1)} \oplus \zeta^{(2)} \oplus \cdots$. El segundo sumando tiene norma menor igual que ϵ veces la norma de $a_0 \oplus \zeta^{(1)} \oplus \zeta^{(2)} \oplus \cdots$ en $\mathcal{T}(X)$. Esto implica que

$$\|T - (\phi_\infty(a) - \phi_\infty(a)P_0)\| < \epsilon,$$

lo que prueba la primera afirmación. $\square$

Definición 4.2.7. Sea K un ideal de $J(X)$. Denotamos por $\mathcal{O}(K, X)$ al cociente

$$\mathcal{T}(X)/\mathcal{I}(K, X),$$

y le llamamos *álgebra de Cuntz-Pimsner relativa determinada por K.*

Observación 4.2.8. El álgebra relativa de Cuntz-Pimsner es una construcción intermedia entre el álgebra de Toeplitz y el álgebra de Cuntz-Pimsner. En efecto, si $K = \{0\}$, $\mathcal{O}(\{0\}, X) = \mathcal{T}(X)$, el álgebra de Toeplitz de X; y si $K = J(X)$, $\mathcal{O}(J(X), X) = \mathcal{O}(X)$, el álgebra de Cuntz-Pimsner de X.

Observación 4.2.9. (Teorema 3.13 de [16]). Cuando ϕ es inyectiva, obtenemos una sucesión exacta de C^*-álgebras:

$$0 \to \frac{\mathcal{I}(K, X)}{\mathcal{I}(J(X), X)} \to \frac{\mathcal{T}(X)}{\mathcal{I}(J(X), X)} = \mathcal{O}(J(X), X) \to \mathcal{O}(J(X), X) = \mathcal{O}(X) \to 0.$$

Por esta razón, el álgebra de Cuntz-Pimsner relativa determinada por K es también denominada *la extensión de $\mathcal{O}(X)$ por $J(X)/K$.*

Teorema 4.2.10. *Sean K un ideal de $J(X)$ y (ψ, π) una representación de Toeplitz de X en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *$\psi \times \pi$ se anula en $\mathcal{I}(K, X)$ y por lo tanto induce una representación de $\mathcal{O}(K, X)$ en $\mathcal{H}$.*

2. *Para todo a en K, se satisface $(\psi, \pi)^{(1)}(\phi(a)) = \pi(a)$.*

Demostración. Escribiremos ρ en lugar de $\psi \times \pi$. Veamos que la segunda afirmación implica la primera. Para ello, alcanza con ver que para todo a en K es $\rho(\phi_\infty(a)P_0) = 0$, ya que si ese es el caso, como el núcleo de ρ es un ideal de $\mathcal{T}(X)$, para ver que contiene a $\mathcal{I}(K, X)$ es suficiente ver que contiene a un conjunto generador.

Sea a en K. Como $\phi(a)$ es un operador compacto, escribimos $\phi(a) = \text{lím}_n \sum_{i\in I} \theta_{x_{i,n},y_{i,n}}$ para ciertos elementos $x_{i,n}, y_{i,n}$ de X. Así,

$$\phi_\infty(a)P_0 = \lim_n \sum_{i\in I} T_{x_{i,n}} T^*_{y_{i,n}} - \phi_\infty(a).$$

Por lo tanto,

$$\rho(\phi_\infty(a))P_0 = \rho(\lim_n \sum_{i\in I} T_{x_{i,n}} T^*_{y_{i,n}}) - \rho(\phi_\infty(a)) = \lim_n \rho(\sum_{i\in I} T_{x_{i,n}} T^*_{y_{i,n}}) - \pi(a).$$

El primer término del último sumando es igual a $\text{lím}_n(\psi,\pi)^{(1)}(\sum_i \theta_{x_{i,n},y_{i,n}})$, por definición del mapa $(\psi,\pi)^{(1)}$. Así, si $(\psi,\pi)^{(1)}(\phi(a)) = \pi(a)$, concluimos que

$$\rho(\phi_\infty(a)P_0) \quad = \quad (\psi,\pi)^{(1)}\left(\lim_n \sum_{i\in I} \theta_{x_{i,n},y_{i,n}}\right) - \pi(a) = (\psi,\pi)^{(1)}(\phi(a)) - \pi(a) = 0,$$

lo que demuestra que ρ se anula en $\mathcal{I}(K,X)$.

Finalmente, observemos que este argumento es reversible: si ρ se anula en $\mathcal{O}(K,X)$, entonces $(\psi,\pi)^{(1)}(\phi(a)) = \pi(a)$ para todo a en K, lo cual muestra que la primera afirmación implica la segunda. □

Definición 4.2.11. Sean una representación de Toeplitz (ψ,π) de X en la C^*-álgebra B y K un ideal de A contenido en $J(X)$. Decimos que (ψ,π) es *coisométrica* en K si $(\psi,\pi)^{(1)}(\phi(a)) = \pi(a)$ para todo a en K.

Teorema 4.2.12. *Sea K un ideal de $J(X)$. Entonces existe representación de Toeplitz (k_X, k_A) de X en $\mathcal{O}(K,X)$ que es coisométrica en K y verifica*

1. *Para toda representación de Toeplitz (ψ,π) de X en una C^*-álgebra B que es coisométrica en K, existe un homomorfismo $\psi \times_K \pi : \mathcal{O}(K,X) \to B$ que hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathcal{O}(K,X) \arrow[d, "\psi\times_K\pi"] & X \arrow[l, "k_X"'] \arrow[dl, "\psi"] \\ & B & \end{tikzcd}.$$

2. *$\mathcal{O}(K,X)$ está generada como C^*-álgebra por $k_X(X)$ y $k_A(A)$: $\mathcal{O}(K,X) = C^*(k_X, k_A)$.*

La terna $(\mathcal{O}(K,X), k_X, k_A)$ es esencialmente única: si (B, k'_X, k'_A) tiene propiedades similares, entonces existe un isomorfismo $\theta : \mathcal{O}(K,X) \to B$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "k_A"] \arrow[dr, "k'_A"'] & \mathcal{O}(K,X) \arrow[d, "\theta"] & X \arrow[l, "k_X"'] \arrow[dl, "k'_X"] \\ & B & \end{tikzcd}.$$

Además, existe una acción canónica fuertemente continua $\gamma : \mathbb{T} \to \text{Aut}(\mathcal{O}(K,X))$ que satisface

- $\gamma_z(k_A(a)) = k_A(a)$
- $\gamma_z(k_X(x)) = zk_X(x)$

para cada z en $\mathbb{T}, a$ en A y x en X.

Demostración. Sean $Q : \mathcal{T}(X) \to \frac{\mathcal{T}(X)}{\mathcal{I}(K,X)}$ el mapa cociente y $k_X = Q \circ i_X$ y $k_A = Q \circ i_A$. Claramente (k_X, k_A) es una representación de Toeplitz de X que es coisométrica en K. Además, $C^*(k_X, k_A) = \mathcal{O}(K, X)$. Verifiquemos la primeraa de las propiedades enunciadas. Sea (ψ, π) una representación de Toeplitz de X en una C^*-álgebra B coisométrica en K. Por ser una representación de Toeplitz, existe un mapa $\psi \times \pi : \mathcal{T}(X) \to B$ como en el teorema 4.1.23. Además, como (ψ, π) es coisométrica en K, el mapa $\psi \times \pi$ induce un mapa en el cociente $\frac{\mathcal{T}(X)}{\mathcal{I}(K,X)} = \mathcal{O}(K, X)$, que denotamos $\psi \times_K \pi$. Observemos que $Q \circ \psi \times \pi = \psi \times_K \pi$. Ahora la conmutatividad del diagrama mencionado en el enunciado de esta proposición se deduce de la conmutatividad del diagrama correspondiente a $\psi \times \pi$ junto con el hecho de que todos los mapas involucrados pasan al cociente.

Por último, la unicidad y la existencia de la acción canónica se demuestran de forma análoga a lo hecho en el teorema 4.1.23. Otro camino posible para demostrar estas afirmaciones es invocar el correspondiente resultado para el álgebra de Toeplitz y luego trasladarlo al cociente a través de la composición con Q. $\square$

Observación 4.2.13. Sea K un ideal de A contenido en $J(X)$. Los teoremas 4.1.23 y 4.2.12 nos proporcionan dos álgebras asociadas a la terna (A, X, K):

- El álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}(X)$, que es el álgebra generada por una representación de Toeplitz universal (i_X, i_A) de X.
- El álgebra de Cuntz-Pimsner relativa $\mathcal{O}(K, X)$, que es el álgebra generada por una representación de Toeplitz coisométrica en K universal (k_X, k_A).

La universalidad de las representaciones anteriores debe entenderse en el sentido de los teoremas 4.1.23 y 4.2.12: cualquier otra representación de su clase se factoriza a través del álgebra en cuestión con la representación universal adecuada.

De lo anterior concluimos que $\mathcal{I}(K, X)$ coincide con el ideal bilateral cerrado generado por los elementos de la forma $(i_X, i_A)^{(1)}(\phi(a)) - i_A(a)$ para a en K, y recordamos que $\mathcal{O}(K, X) \cong \frac{\mathcal{T}(X)}{\mathcal{I}(K,X)}$.

En principio, nada asegura que las álgebras $\mathcal{O}(K, X)$ sean no nulas. Los siguientes resultados determinan condiciones suficientes para que esto suceda.

Para ver que $\mathcal{O}(K, X)$ es no nula, alcanza con mostrar que $\phi_\infty(A) \cap \mathcal{I}(K, X) = \{0\}$. Esto equivale a que la composición de ϕ_∞ y el mapa cociente de $\mathcal{T}(X)$ sobre $\mathcal{O}(K, X)$ es fiel en A, es decir, existe una copia fiel de A en $\mathcal{O}(K, X)$.

Denotaremos por $Q_n \in \mathfrak{L}(F(X))$ a la proyección sobre $X^{\otimes n}$. Así, de acuerdo con la notación antes introducida, tenemos que $Q_0 = P_0$ y que $Q_n = P_n - P_{n-1}$ para todo $n \geq 1$.

Lema 4.2.14. *Sean K un ideal en $J(X)$ y T en $\mathcal{O}(K, X)$. Entonces*

1. *Si existen $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_r$ en X tales que $T = T_{x_1} \cdots T_{x_k} \phi_\infty(a) Q_0 T^*_{y_1} \cdots T^*_{y_r}$, entonces*

$$Q_n T Q_m = \delta_{n,k} \delta_{r,m} T,$$

para todos n, m en $\mathbb{N}$.

2. Q_nTQ_m *es un elemento de* $\mathcal{O}(K,X)$ *para todos* n,m *en* $\mathbb{N}$.

3. $\lim_n \|Q_nTQ_n\| = 0$.

4. *Para cada* g,h *en* $F(X)$, $\langle Tg,h\rangle_{F(X)}$ *es un elemento de* K.

Demostración. La primera afirmación es una consecuencia directa de las definiciones de los operadores involucrados en ella. Además, como todo elemento de $F(K)$ es límite en norma de combinaciones lineales de operadores de la forma $T_{x_1}\cdots T_{x_k}\phi_\infty(a)Q_0T^*_{y_1}\cdots T^*_{y_r}$ para ciertos $x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_r$ en X, la segunda y tercera afirmación se deducen de la primeraa.

Para demostrar la última afirmación, basta tomar nuevamente

$$T = T_{x_1}\cdots T_{x_k}\phi_\infty(a)Q_0T^*_{y_1}\cdots T^*_{y_r},$$

y suponer que g,h son elementos de $X^{\otimes n}$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle Tg,h\rangle_{F(X)} &= \langle Q_nTQ_ng,h\rangle_{F(X)}\\ &= \delta_{n,k}\delta_{r,n}\langle T_{x_1}\cdots T_{x_k}\phi_\infty(a)Q_0T^*_{y_1}\cdots T^*_{y_r}g,h\rangle_{F(X)}.\end{aligned}$$

En el caso en que $k=r=n$, este último término coincide con

$$\langle \phi_\infty(a)Q_0T^*_{y_1}\cdots T^*_{y_n}g, T^*_{x_1}\cdots T^*_{x_n}h\rangle_{F(X)}.$$

Como g es un elemento de $X^{\otimes n}$, $T^*_{y_1}\cdots T^*_{y_n}g =: b$ es un elemento de A, visto como un elemento en el primer sumando de $F(X)$. Análogamente, $T^*_{x_1}\cdots T^*_{x_n}h =: c$ es también un elemento de A, y así

$$\langle \phi_\infty(a)Q_0T^*_{y_1}\cdots T^*_{y_n}g, T^*_{x_1}\cdots T^*_{x_n}h\rangle_{F(X)} = b^*a^*c.$$

Como a está en K, que es un ideal de A, b^*a^*c también es un elemento de K. □

Teorema 4.2.15. *Sea* K *un ideal de* $J(X)$. *Entonces* $\phi|_K : K \to \mathcal{K}(X)$ *es inyectivo si y sólo si la composición de* ϕ_∞ *con el mapa cociente de* $\mathcal{T}(X)$ *sobre* $\mathcal{O}(K,X)$ *es inyectivo; equivalentemente,* $\phi_\infty^{-1}(\mathcal{I}(K,X)) = 0$.

Demostración. Veamos primero la implicancia "si". Sea a en K tal que $\phi|_K(a) = \phi(a) = 0$. Como $(Q\circ T, Q\circ\phi_\infty)$ es coisométrica en K, tenemos que $Q\circ\phi_\infty(a) = (Q\circ T, Q\circ \phi_\infty)^{(1)}(\phi(a)) = 0$. Como $Q\circ\phi_\infty$ es inyectiva, es $a=0$.

Probemos la implicancia "sólo si". Comenzamos con un resultado intermedio.

Afirmación: ***Si para algún*** a ***de*** A ***y para algún*** n ***en*** $\mathbb{N}$***,*** $\phi_\infty(a)\in\mathcal{I}(K,X)$ ***y*** $\phi_\infty(a)Q_n = 0$***, entonces*** $\phi_\infty(a)Q_{n-1} = 0$.

Si $y_1\otimes\cdots\otimes y_n \in X^{\otimes n}$, entonces $0 = \phi_\infty(a)(y_1\otimes\cdots\otimes y_n) = (\phi(a)y_1)\otimes\cdots\otimes y_n$, y así

$$\begin{aligned}0 &= \langle(\phi(a)y_1)\otimes\cdots\otimes y_n, (\phi(a)y_1)\otimes\cdots\otimes y_n\rangle_{X^{\otimes n}}\\ &= \langle y_n, \phi(\langle(\phi(a)y_1)\otimes y_2\otimes\cdots\otimes y_{n-1}, (\phi(a)y_1)\otimes y_2\otimes\cdots\otimes y_{n-1}\rangle_{X^{\otimes n-1}})y_n\rangle_X.\end{aligned}$$

Como esto ocurre para todo y_n en X, concluimos que

$$\phi(\langle\phi_\infty(a)y_1\otimes y_2\otimes\cdots\otimes y_{n-1},\phi_\infty(a)y_1\otimes y_2\otimes\cdots\otimes y_{n-1}\rangle_{X^{\otimes n-1}})=0.$$

Por otro lado, como $\phi_\infty(a)$ es un elemento de $\mathcal{O}(K,X)$, todos los productos internos de la forma $\langle\phi_\infty(a)\xi,\eta\rangle_{F(X)}$ están en K, para todos ξ,η en $F(X)$. Ahora, puesto que $\phi_\infty(a)=0$ para todo $y=y_1\otimes y_2\otimes\cdots\otimes y_{n-1}\in X^{\otimes n-1}$, concluimos que $\phi_\infty(a)Q_{n-1}=0$, lo que demuestra la afirmación.

Sea a en K tal que $\phi_\infty(a)=0$. Si para algún n sucede que $\phi_\infty(a)Q_n=0$, entonces aplicando la afirmación anterior sucesivamente, concluimos que

$$0=\phi_\infty Q_{n-1}=\cdots\phi_\infty(a)Q_0=\phi(a)Q_0=\phi(a)P_0,$$

de modo que $a=0$, pues ϕ es inyectiva en K.

Podemos asumir entonces que $\phi_\infty(a)Q_n\neq 0$ para todo n en $\mathbb{N}$. En particular, podemos asumir que $X^{\otimes n}\neq\{0\}$ para todo n. Como las proyecciones Q_n conmutan con $\phi_\infty(A)$, los mapas $a\mapsto\phi_\infty(a)Q_n:A\to\mathfrak{L}(X^{\otimes n})$ son homomorfismos, y el párrafo anterior permite suponer que son todos fieles en $\phi_\infty^{-1}(\mathcal{I}(K,X))$.

Así, si a es un elemento de $\phi_\infty^{-1}(\mathcal{I}(K,X))$, tenemos $\|a\|=\text{lím}_n\|Q_n\phi_\infty(a)Q_n\|$. Finalmente, este límite debe ser cero por la parte (3) del lema anterior. Por lo tanto, $\phi_\infty^{-1}(\mathcal{I}(K,X))=0$. □

Lema 4.2.16. *Sean K un ideal de $J(X)$ y (k_X,k_A) una representación de Toeplitz coisométrica en K universal. Si b es un elemento de $J(X)$ tal que $(k_X,k_A)^{(1)}(\phi(b))=_A(b)$, entones b es de hecho un elemento de K.*

Demostración. El lema 4.2.6 implica que a es un elemento de $J(X)$ si y sólo si

$$(T,\phi_\infty)^{(1)}(\phi(a))=\phi_\infty(a)-P_0\phi_\infty(a).$$

Ahora, si $Q:\mathcal{T}(X)\to\mathcal{O}(K,X)$ denota el mapa cociente, entonces $(k_X,k_A)^{(1)}=Q\circ(T,\phi_\infty)^{(1)}$ y entonces

$$Q(P_0\phi_\infty(b))=Q\left(\phi_\infty(b)-(T,\phi_\infty)^{(1)}(\phi(b))\right)=k_A(b)-(k_X,k_A)^{(1)}(\phi(b))=0.$$

Recordemos que $\mathcal{I}(K,X)$ es el ideal generado por los elementos de la forma

$$\{(T,\phi_\infty(a))^{(1)}-\phi_\infty(a):a\in K\}=\{P_0\phi_\infty(a):a\in K\},$$

en virtud del teorema 4.2.10. Esto, junto con el hecho de que $Q(P_0\phi_\infty(b))=0$ implica que $P_0\phi_\infty(b)$ es límite de sumas de elementos de la forma

$$T_{x_1}\cdots T_{x_n}P_0\phi_\infty(a)T^*_{y_1}\cdots T^*_{y_m},$$

para ciertos $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m$ en X, y a en K. Sin embargo, como

$$T_{x_1}\cdots T_{x_n}P_0\phi_\infty(a)T^*_{y_1}\cdots T^*_{y_m}=\begin{pmatrix}0_{n\times m} & * \\ * & *\end{pmatrix},$$

y $P_0\phi_\infty(a) = diag(a, 0, 0, \ldots)$, esto sólo puede ocurrir si $n = m = 0$, es decir, si no aparecen T_x o T_y^* cuando escribimos a $P_0\phi_\infty(b)$. Por lo tanto,

$$diag(b, 0, 0, \ldots) = P_0\phi_\infty(b) = P_0\phi_\infty(a) = diag(a, 0, 0, \ldots)$$

para algún a en K, de modo que $b = a \in K$. □

Lema 4.2.17. *Sea (ψ, π) una representación de Toeplitz de X inyectiva. Si a es un elemento de A y $\pi(a)$ está en la imagen de $(\psi, \pi)^{(1)}$, entonces a está en $J(X)$ y $\pi(a) = (\psi, \pi)^{(1)}(\phi(a))$.*

Demostración. Como $\pi(a) \in (\psi, \pi)^{(1)}(\mathcal{K}(X))$, existe T en $\mathcal{K}(X)$ tal que $\pi(a) = (\psi, \pi)^{(1)}(T)$. Además, para cada x en X se tiene

$$\psi(Tx) = (\psi, \pi)^{(1)}(T)(\psi(x)) = \pi(a)\psi(x) = \psi(\phi(a)x).$$

Como π es inyectiva, ψ es una isometría y entonces $T(x) = \phi(a)x$ para todo x en X, de modo que $T = \phi(a)$ y $\pi(a) = (\psi, \pi)^{(1)}(\phi(a))$. □

El siguiente es un teorema de unicidad asumiendo la invarianza bajo la acción canónica. Este resultado nos permitirá obtener una propiedad similar para el producto cruzado definido por Exel, una vez que hallamos identificado estas dos construcciones.

Teorema 4.2.18. *Sean K un ideal de $J(X)$, B una C^*-álgebra y $\mu : \mathcal{O}(K, X) \to B$ un homomorfismo que satisface*

1. *la restricción de μ a $k_A(A)$ es inyectiva;*
2. *si $\mu(k_A(a)) \in \mu\left((k_X, k_A)^{(1)}(\mathcal{K}(X))\right)$, entonces $k_A(a) \in k_A(K)$; y*
3. *existe una acción canónica fuertemente continua $\beta : \mathbb{T} \to \operatorname{Aut}\mu(\mathcal{O}(K, X))$ que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(K, X) & \xrightarrow{\gamma_z} & \mathcal{O}(K, X) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mu} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mu} \\ \mu(\mathcal{O}(K, X)) & \xrightarrow[\beta_z]{} & \mu(\mathcal{O}(K, X)). \end{array}$$

Entonces μ es inyectivo.

Capítulo 5

Comparación de las construcciones anteriores.

En este capítulo, nos proponemos re-examinar la construcción del producto cruzado por un endomorfismo que introdujo Exel y que presentamos en el capítulo 2. Concretamente, identificaremos una familia de representaciones para las cuales el producto cruzado $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ es universal. Mostraremos luego que $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ puede ser identificado como un álgebra de Cuntz-Pimsner relativa, y acudiremos a resultados conocidos para estas álgebras para estudiar el producto cruzado.

En particular, identificaremos condiciones necesarias y suficientes en el operador de transferencia $\mathcal{L}$ para que el mapa canónico $j_A : A \to A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ sea inyectivo, respondiendo así a una de las preguntas que Exel dejó planteadas en [9].

5.1. El producto cruzado y las representaciones de Toeplitz.

Sean A una C^*-álgebra unital, α un endomorfismo de A y $\mathcal{L}$ un operador de transferencia para el par (A, α). Recordemos que $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ es el álgebra universal generada por una copia de A y un elemento S que satisface $Sa = \alpha(a)S$ y $S^*aS = \mathcal{L}(a)$ para todo a en A. Por definición, $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ es universal para la familia de representaciones Toeplitz-covariantes (definición 2.2.1) de la terna $(A, \alpha, \mathcal{L})$.

Denotamos por (i_A, S) a la representación Toeplitz-covariante universal de $(A, \alpha, \mathcal{L})$ en $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$. Si (ρ, V) es otra representación Toeplitz-covariante en una C^*-álgebra B, denotamos por $\rho \times V$ al homomorfismo de $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ en B que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "\rho"'] & \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L}) \arrow[d, "\rho\times V"] & S \arrow[d, "\rho\times V"] \\ & B & V. \end{tikzcd}$$

Además, el mapa $i_A : A \to \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ es inyectivo (teorema 2.2.10).

Recordemos que en la correspondencia $M_{\mathcal{L}}$ construida en la sección 2.2, la acción a izquierda está dada por un homomorfismo $\phi : A \to \mathfrak{L}(M_{\mathcal{L}})$ y es $a \cdot m = \phi(a)m := q(a)m$; la acción derecha está dada por $m \cdot a = mq(\alpha(a))$, y el producto interno con valores en A es $\langle q(m), q(n)\rangle_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(m^*n)$.

Nuestro primer objetivo es identificar el álgebra $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ como un álgebra de Toeplitz de una cierta correspondencia. Explícitamente, probaremos que $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L}) \cong \mathcal{T}(M_{\mathcal{L}})$. Para ello, necesitaremos algunos resultados intermedios.

Lema 5.1.1. *La correspondencia $M_{\mathcal{L}}$ es esencial a izquierda y derecha, esto es, $A \cdot M_{\mathcal{L}} = M_{\mathcal{L}} = M_{\mathcal{L}} \cdot A$.*

Demostración. la primeraa de las igualdades es inmediata: $1 \cdot q(a) = q(1a) = q(a)$ para todo a en A. La segunda se debe al hecho de que $M_{\mathcal{L}}$ es un módulo de Hilbert a derecha, y éstos son siempre esenciales. En efecto, se tiene que $q(a) \cdot 1 = q(a)$ para todo b en A:

$$\begin{aligned}
\langle q(a) - q(a) \cdot 1, q(a) - q(a) \cdot 1\rangle &= \langle q(a), q(a)\rangle - \langle q(a), q(a\alpha(1))\rangle - \langle q(a\alpha(1)), q(a)\rangle \\
&\quad + \langle q(a\alpha(1)), q(a\alpha(1))\rangle \\
&= \mathcal{L}(a^*a) - \mathcal{L}(a^*a\alpha(1)) - \mathcal{L}(\alpha(1)a^*a) + \mathcal{L}(\alpha(1)a^*a\alpha(1)) \\
&= \mathcal{L}(a^*a) - \mathcal{L}(a^*a)1 - 1\mathcal{L}(a^*a) - 1\mathcal{L}(a^*a)1 = 0.
\end{aligned}$$

□

El próximo resultado permite suponer que en las representaciones de Toeplitz (ψ, π) de $M_{\mathcal{L}}$, π siempre es unital. En efecto, se tiene que todas son de esta forma, a menos de sumar operadores nulos.

Lema 5.1.2. *Sea (ψ, π) una representación de Toeplitz de $M_{\mathcal{L}}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces el subespacio esencial de π, definido como $\mathcal{K} = \overline{\text{span}}\{\pi(a)h : a \in A, h \in \mathcal{H}\}$ es reductor para (ψ, π), y además se tiene que $\pi|_{\mathcal{K}^\perp} = 0$ y $\psi|_{\mathcal{K}^\perp} = 0$.*

Demostración. Como $\mathcal{K}$ es el subespacio esencial de π, es claro que es reductor para π y que $\pi|_{\mathcal{K}^\perp} = 0$. Veamos que lo mismo ocurre con ψ.

Sean m en $M_{\mathcal{L}}$ y k en $\mathcal{K}$. Por el lema anterior, se tiene que $m = m \cdot 1 = 1 \cdot m$. Entonces

$$\psi(m)k = \psi(1 \cdot m) = \pi(1)\psi(m)k,$$

que es un elemento de $\mathcal{K}$. Por otro lado,

$$\psi^*(m)k = \psi^*(m \cdot 1)k = (\psi(m)\pi(1))^*k = \pi(1)\psi^*(m)k,$$

que también es un elemento de $\mathcal{K}$. Por lo tanto, $\mathcal{K}$ es reductor para ψ, pues es invariante por ψ y por ψ^*.

Por último, veamos que $\psi|_{\mathcal{K}^\perp} = 0$. Si m es un elemento de $M_{\mathcal{L}}$ y h es uno de $\mathcal{K}^\perp$, entonces

$$\|\psi(m)h\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle\psi(m)h, \psi(m)h\rangle_{\mathcal{H}} = \langle\psi(m)^*\psi(m)h, h\rangle_{\mathcal{H}} = \langle\pi(\langle m, m\rangle_{M_{\mathcal{L}}})h, h\rangle_{\mathcal{H}} = 0,$$

ya que $\pi(\langle m, m\rangle_{M_{\mathcal{K}}})h = 0$. Por lo tanto, $\psi(m)h = 0$ para todo h en $\mathcal{K}^\perp$. Esto implica que $\mathcal{K}^\perp$ es invariante por ψ (que ya lo sabíamos gracias al cálculo anterior), y que ψ en este subespacio es nulo. □

El siguiente lema afirma que existe una correspondencia biunívoca entre las representaciones Toeplitz-covariantes de $(A, \alpha, \mathcal{L})$ y las representaciones de Toeplitz de $M_{\mathcal{L}}$.

Lema 5.1.3. *Dada una representación Toeplitz-covariante* (ρ, V) *de* $(A, \alpha, \mathcal{L})$ *en una* C^**-álgebra* B*, existe un mapa lineal* $\psi_V : M_{\mathcal{L}} \to B$ *que satisface* $\psi_V(q(a)) = \rho(a)V$ *para todo* a *en* A*, y además* (ψ_V, ρ) *es una representación de Toeplitz de* $M_{\mathcal{L}}$ *en* B*.*

Recíprocamente, si (ψ, π) *es una representación de Toeplitz de* $M_{\mathcal{L}}$ *en una* C^**-álgebra unital* B*, siendo* π *un homomorfismo unital, entonces el par* $(\pi, \psi(q(1)))$ *es una representación Toeplitz-covariante de* $(A, \alpha, \mathcal{L})$ *en* B*. Además,* $\psi_{\psi(q(1))} = \psi$*.*

Demostración. Definimos $\theta : A_{\mathcal{L}} \to B$ por $\theta(a) = \rho(a)V$. Entonces θ es lineal y si a es un elemento de A, entonces

$$\|\theta(a)\|^2 = \|\rho(a)V\|^2 = \|V^*\rho(a^*a)V\| = \|\rho(\mathcal{L}(a^*a))\| \leq \|\mathcal{L}(a^*a)\| = \|\langle a, a\rangle_{\mathcal{L}}\|,$$

de modo que θ es acotado para la seminorma de $A_{\mathcal{L}}$, con $\|\theta\| \leq 1$. En consecuencia, θ induce un mapa acotado $\psi_V : M_{\mathcal{L}} \to B$ que satisface $\psi_V(q(a)) = \rho(a)V$. Veamos que (ψ_V, ρ) es una representación de Toeplitz de $M_{\mathcal{L}}$ en B. Si $a, b, c \in A$, tenemos que:

- $\psi_V(q(b) \cdot a) = \psi_V(q(b)\alpha(a)) = \rho(b\alpha(a))V = \rho(b)V\rho(a) = \psi_V(q(b))\rho(a)$
- $\psi_V(q(b))^*\psi_V(q(c)) = V^*\rho(b^*c)V = \rho(\mathcal{L}(b^*c)) = \rho(\langle q(b), q(c)\rangle_{\mathcal{L}})$
- $\psi_V(a \cdot q(b)) = \psi_V(aq(b)) = \rho(ab)V = \rho(a)\rho(b)V = \rho(a)\psi_V(q(b))$.

Sea ahora (ψ, π) una representación de Toeplitz de $M_{\mathcal{L}}$ en una C^*-álgebra unital B, con π un homomorfismo unital. Veamos que $(\pi, \psi(q(1)))$ es una representación Toeplitz-covariante de $(A, \alpha, \mathcal{L})$. Si $a \in A$, tenemos que:

- $\psi(q(1))\pi(a) = \psi(q(1)\cdot a) = \psi(q(1)\alpha(a)) = \psi(q(\alpha(a))) = \psi(\alpha(a)q(1)) = \pi(\alpha(a))\psi(q(1))$
- $\psi(q(1))^*\pi(a)\psi(q(1)) = \psi(q(1))^*\psi(a \cdot q(1)) = \psi(q(1))^*\psi(q(a)) = \pi(\langle q(1), q(a)\rangle_{\mathcal{L}}) = \pi(\mathcal{L}(a))$.

Finalmente, $\psi_{\psi(q(1))}(q(a)) = \pi(a)\psi(q(1)) = \psi(a \cdot q(1)) = \psi(q(a))$, de modo que $\psi_{\psi(q(1))} = \psi$. $\square$

Corolario 5.1.4. *El álgebra universal* $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ *es isomorfa al álgebra de Toeplitz de* $M_{\mathcal{L}}$*, esto es,* $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L}) \cong \mathcal{T}(M_{\mathcal{L}})$*.*

Demostración. Probaremos que $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ tiene la propiedad universal que caracteriza a $\mathcal{T}(M_{\mathcal{L}})$: ver el teorema 4.1.23. Como (i_A, S) es una representación Toeplitz-covariante de $(A, \alpha, \mathcal{L}), (\psi_S, i_A)$ es una representación de Toeplitz de $M_{\mathcal{L}}$ en $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ por el lema anterior, es decir, la terna $(\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L}), \psi_S, i_A)$ verifica la primera condición en el teorema 4.1.23. Además, esa representación tiene como imagen toda el álgebra $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$, que está generada por $i_A(A)$ y S, de modo que también se satisface la tercera condición. Resta verificar la segunda: para cada representación de Toeplitz de $M_{\mathcal{L}}$ debemos encontrar una representación de $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ de forma que la representación de Toeplitz dada se factorice a través de $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ con la representación (ψ_S, i_A) y el mapa que queremos hallar.

Sea (ψ, π) una representación de Toeplitz de $M_{\mathcal{L}}$; podemos suponer que su imagen está contenida en los operadores acotados de cierto espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Además, por el lema 5.1.2, a menos de ignorar sumandos triviales, podemos suponer que π es unital. En consecuencia, podemos aplicar el lema anterior a (ψ, π) (o a la restricción de ella a $\mathcal{K} = \pi(1)\mathcal{H}$) para obtener una representación Toeplitz-covariante de $(A, \alpha, \mathcal{L})$ en $\mathcal{H}$, que denotamos por $(\pi, \psi(q(1)))$.

Sea ahora $\mu = \pi \times \psi(q(1)) : \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Entonces $\mu \circ i_A = \pi$, y si $a \in A$,

$$\begin{aligned} \mu \circ \psi_S(q(a)) &= \mu(i_A(a)S) = \mu(i_A(a)\mu(S) = \pi(a)\psi(q(1)) \\ &= \pi(a)\psi(q(1)) = \psi_{\psi(q(1))}(q(a)) = \psi(q(a)), \end{aligned}$$

de modo que $\mu \circ \psi_S = \psi$. □

Proposición 5.1.5. *El homomorfismo* $(\psi_S, i_A)^{(1)} : \mathcal{K}(M_{\mathcal{L}}) \to \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ *inducido por* (ψ_S, i_A) *es inyectivo.*

Demostración. Sea T en $\mathcal{K}(M_{\mathcal{L}})$ tal que $(\psi_S, i_A)^{(1)}(T) = 0$. Entonces para todo x en $M_{\mathcal{L}}$, es

$$0 = (\psi_S, i_A)^{(1)}(T)(\psi_S(x)) = \psi_S(Tx).$$

Como ψ_S es inyectiva, esto implica que $Tx = 0$ para todo x en $M_{\mathcal{L}}$. Así $T = 0$ y $(\psi_S, i_A)^{(1)}$ es inyectivo. □

Corolario 5.1.6. *El mapa* $(\psi_S, i_A)^{(1)}$ *es un isomorfismo entre* $\mathcal{K}(M_{\mathcal{L}})$ *y* $i_A(A)SS^*i_A(A) = MM^*$.

Demostración. Alcanza con observar que $(\psi_S, i_A)^{(1)}$ es inyectivo y la imagen de $\mathcal{K}(M_{\mathcal{L}})$, que es cerrada, es densa en $\psi_S(M_{\mathcal{L}})\psi_S(M_{\mathcal{L}})^* = MM^*$. □

5.2. Las redundancias y las álgebras de Cuntz-Pimsner relativas.

Exel definió una redundancia como siendo un par $(i_A(a), k)$ donde a es un elemento de A y k es un elemento de MM^*=$i_A(A)SS^*i_A(A)$, que satisfacen $i_A(a)i_A(b)S = ki_A(b)S$ para todo b en A.

En principio, esta definición abre varias preguntas en referencia a las redundancias. En primer lugar, no es claro que siempre existan redundancias no triviales. Por otro lado, tampoco es claro si todo a en A admite un elemento k en MM^* de modo que (a, k) sea una redundancia. Más aún, en caso de existir, un tal k podría no ser único, al menos para ciertos a de A.

El siguiente lema, además de identificar las redundancias, responde las preguntas del párrafo anterior.

Lema 5.2.1. *Sean* a *en* A *y* k *en* $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$. *Entonces* $(i_A(a), k)$ *es una redundancia si y sólo si* a *es un elemento de* $J(M_{\mathcal{L}}) = \phi^{-1}(\mathcal{K}(M_{\mathcal{L}}))$ *y* $k = (\psi_S, i_A)^{(1)}(\phi(a))$.

Demostración. Veamos la implicancia “si”. Tenemos que $k \in (\psi_S, i_A)^{(1)}(\mathcal{K}(M_{\mathcal{L}})) = MM^*$ y además si b es un elemento de A,

$$\begin{aligned} i_A(a)i_A(b)S &= i_A(a)\psi_S(q(b)) = \psi_S(\phi(a)q(b)) = (\psi_S, i_A)^{(1)}(\phi(a))\psi_S(q(b)) \\ &= (\psi_S, i_A)^{(1)}(\phi(a))i_A(b)S, \end{aligned}$$

donde en la tercera igualdad usamos la segunda propiedad que caracteriza al homomorfismo $(\psi, \pi)^{(1)}$. De esto se deduce que $\big(a, (\psi_S, i_A)^{(1)}(\phi(a))\big)$ es una redundancia.

Recíprocamente, supongamos que (a, k) es una redundancia, donde k es un elemento de $MM^* = \text{Im}\left((\psi_S, i_A)^{(1)}\right)$. Por la proposición 5.1.5, existe un único T en $\mathcal{K}(M_\mathcal{L})$ tal que $(\psi_S, i_A)^{(1)}(T) = k$. Así, si b es un elemento de A, se tiene que

$$\begin{aligned}\psi_S(\phi(a)q(b)) &= \psi_S(q(ab)) = i_A(ab)S = i_A(a)i_A(b)S = ki_A(b)S \\ &= (\psi_S, i_A)^{(1)}(T)\psi_S(q(b)) = \psi_S(T(q(b))),\end{aligned}$$

y por lo tanto, $\psi_S(\phi(a)) = \psi_S(T)$. Como $i_A : A \to \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ es inyectivo, también lo es ψ_S, ya que (ψ_S, i_A) es una representación de Toeplitz (ver observación 4.1.7). En este caso es sencillo dar una demostración directa de este hecho:

$$\psi_S(q(a)) = 0 \Leftrightarrow i_A(a)S = 0 \Leftrightarrow S^* i_A(a^*a)S = 0 \Leftrightarrow i_A(\mathcal{L}(a^*a)) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}(a^*a) = 0 \Leftrightarrow q(a) = 0.$$

Finalmente, la inyectividad de ψ_S implica que $\phi(a) = T$, como queríamos ver. □

Recordemos la definición del producto cruzado de A por α relativo a $\mathcal{L}$. Sea $\mathcal{I}(A, \alpha, \mathcal{L})$ el ideal bilateral cerrado generado por $\{i_A(a) - k : (i_A(a), k)$ es una redundancia con $a \in A\mathcal{R}A\}$. Entonces

$$A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} := \frac{\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})}{\mathcal{I}(A, \alpha, \mathcal{L})}.$$

Denotamos por $Q : \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L}) \to A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}}$ al mapa cociente.

Corolario 5.2.2. *Con la notación del párrafo anterior, sea $K_\alpha = A\mathcal{R}A \cap J(K_\mathcal{L})$. Entonces, $\mathcal{I}(A, \alpha, \mathcal{L})$ es el ideal generado por $\{i_A(a) - (\psi_S, i_A)^{(1)}(\phi(a)) : a \in K_\alpha\}$.*

En este punto, podemos identificar el producto cruzado $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ como un álgebra de Cuntz-Pimsner relativa. De todos modos, más adelante estaremos en condiciones de dar un isomorfismo concreto que nos permitirá identificar ambas construcciones, y que además nos permitirá inferir ciertas propiedades del producto cruzado a partir de otras de las álgebras de Cuntz-Pimsner relativas.

Corolario 5.2.3. *Con la notación de la observación 4.2.13, el corolario anterior implica que $\mathcal{I}(A, \alpha, \mathcal{L})$ es (isomorfo a) $\mathcal{I}(K_\alpha, M_\mathcal{L})$. Por lo tanto, se tiene que*

$$A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} = \frac{\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})}{\mathcal{I}(A, \alpha, \mathcal{L})} \cong \frac{\mathcal{T}(M_\mathcal{L})}{\mathcal{I}(K_\alpha, M_\mathcal{L})} = \mathcal{O}(K_\alpha, M_\mathcal{L}).$$

El objetivo ahora es describir el producto cruzado $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ como un objeto universal. Para ello, necesitamos identificar las representaciones Toeplitz-covariantes que se anulan en el ideal $\mathcal{I}(A, \alpha, \mathcal{L})$.

Lema 5.2.4. *Sea (ρ, V) una representación Toeplitz-covariante de $(A, \alpha, \mathcal{L})$ en una C^*-álgebra B. Entonces*

$$(\rho \times V) \circ (\psi_S, i_A)^{(1)} = (\psi_V, \rho)^{(1)}.$$

Demostración. Por la observación 4.1.11,

$$(\rho \times V) \circ (\psi_S, i_A)^{(1)} = ((\rho \times V) \circ \psi_S, (\rho \times V) \circ i_A)^{(1)}.$$

Como (i_A, S) es la representación Toeplitz-covariante universal en $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$, se tiene que $(\rho \times V) \circ i_A = \rho$ y $(\rho \times V)(S) = V$. Así,

$$(\rho \times V) \circ \psi_S(q(a)) = (\rho \times V)(i_A(a)S) = \rho(a)V = \psi_V(q(a)),$$

y por lo tanto, $(\rho \times V) \circ \psi_S = \psi_V$. □

Definición 5.2.5. Sea (ρ, V) una representación Toeplitz-covariante de $(A, \alpha, \mathcal{L})$ en una C^*-álgebra B. Decimos que (ρ, V) es una *representación covariante* si además se cumple que para todo a en K_α,

$$\rho(a) = (\psi_V, \rho)^{(1)}(\phi(a)).$$

Observación 5.2.6. Una representación Toeplitz-covariante (ρ, V) es *covariante* si y sólo si la representación (ψ_V, ρ) de Toeplitz de $M_\mathcal{L}$ que ella induce de acuerdo al lema 5.1.3, es *coisométrica* en K_α.

La siguiente proposición afirma que $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ es universal para las representaciones covariantes de $(A, \alpha, \mathcal{L})$.

Proposición 5.2.7. *Sean $j_A = Q \circ i_A, T = Q(S)$. Entonces, el par (j_A, T) es una representación covariante de $(A, \alpha, \mathcal{L})$ en $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$. Además, para cada representación covariante (ρ, V) en una C^*-álgebra B, existe un homomorfismo $\tau_{\rho,V} : A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} \to B$ que hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j_A"] \arrow[dr, "\rho"'] & A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} \arrow[d, "\tau_{\rho,V}"] \\ & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T = Q(S) \arrow[d, "\tau_{\rho,V}"] \\ V. \end{tikzcd}$$

Demostración. El par $(Q \circ i_A, Q(S)) = (j_A, T)$ es una representación Toeplitz-covariante, pues (i_A, S) lo es, y su imagen está contenida en $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$. Además, el mapa $(Q \circ i_A) \times Q(S)$ es precisamente Q:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "j_A"'] & \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L}) \arrow[d, "j_A \times T = Q"] \\ & A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}. \end{tikzcd}$$

Por el lema 5.1.3, obtenemos una representación de Toeplitz $(\psi_T, j_A) : M_\mathcal{L} \to A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$, y para cada a en K_α, tenemos

$$\begin{aligned} j_A(a) &= Q \circ i_A(a) = Q(i_A(a)) = Q\left((\psi_S, i_A)^{(1)}(\phi(a))\right) \\ &= (Q \circ i_A \times Q(S))\left((\psi_S, i_A)^{(1)}(\phi(a))\right) = (\psi_{Q(S)}, Q \circ i_A)^{(1)}(\phi(a)) \\ &= (\psi_T, j_A)(\phi(a)), \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se debe al lema anterior. Como (ψ_T, j_A) es coisométrica en K_α, (j_A, T) es una representación covariante.

Supongamos ahora que (ρ, V) es otra representación covariante de $(A, \alpha, \mathcal{L})$ en una C^*-álgebra B. Por ser una representación Toeplitz-covariante, ella induce un homomorfismo $\rho \times V : \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L}) \to B$. Como la representación (ψ_V, ρ) debe ser coisométrica en K_α al ser (ρ, V) covariante, concluimos que $\rho \times V$ se anula en el ideal $\mathcal{I}(A, \alpha, \mathcal{L})$. Por lo tanto, $\rho \times V$ se factoriza a través de un homomorfismo $\tau_{\rho,V} : A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} \to B$.

$$
\begin{tikzcd}
& \mathcal{T}(A,\alpha,\mathcal{L}) \arrow[d, "Q"] \arrow[dd, bend left=60, "\rho\times V"] \\
A \arrow[ur, "i_A"] \arrow[r, "j_A"] \arrow[dr, "\rho"'] & A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} \arrow[d, "\tau_{\rho,V}"] \\
& B.
\end{tikzcd}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
\tau_{\rho,V} \circ j_A &= \tau_{\rho,V} \circ Q \circ i_A = (\rho \times V) \circ i_A = \rho, \\
\tau_{\rho,V}(T) &= \tau_{\rho,V}(Q(S)) = (\rho \times V)(Q(S)) = V.
\end{aligned}
$$

□

Podemos ahora dar un isomorfismo concreto entre el producto cruzado $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ y el álgebra de Cuntz-Pimsner relativa $\mathcal{O}(K_\alpha, M_\mathcal{L})$.

Teorema 5.2.8. *Existe un isomorfismo $\theta : \mathcal{O}(K_\alpha, M_\mathcal{L}) \to A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ que hace conmutativo el siguiente diagrama*

$$
\begin{tikzcd}
& \mathcal{O}(K_\alpha, M_\mathcal{L}) \arrow[d, "\theta"] \\
A \arrow[ur, "k_A"] \arrow[r, "j_A"] & A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
k_\mathcal{L}(q(1)) \arrow[d, "\theta"] \\
T.
\end{tikzcd}
$$

Demostración. Sea (ψ_T, j_A) la representación de Toeplitz de $M_\mathcal{L}$ inducida por la representación Toeplitz-covariante (j_A, T) de $(A, \alpha, \mathcal{L})$. Probaremos que la terna $(A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}, \psi_T, j_A)$ tiene las propiedades que definen al álgebra de Cuntz-Pimsner relativa a K_α: ver la proposición 4.2.12.

Como (j_A, T) es una representación covariante, (ψ_T, j_A) es coisométrica en K_α. Sea (ψ, π) una representación de Toeplitz de $M_\mathcal{L}$ coisométrica en K_α, que podemos suponer que tiene su imagen contenida en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para algún espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y también que π es unital, o restringir las representaciones a $\pi(1)\mathcal{H}$, que es reductor para (ψ, π), en virtud del lema 5.1.2. Por lo tanto, hay una representación Toeplitz-covariante $(\pi, \psi(q(1)))$ de $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Como $\psi_{\psi(q(1))} = \psi$ y (ψ, π) es coisométrica en K_α, $(\pi, \psi(q(1)))$ es una representación covariante. La proposición anterior nos da un homomorfismo $\tau_{\pi,\psi(q(1))} : A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que satisface

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "j_A"] \arrow[dr, "\pi"'] & A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} \arrow[d, "\tau_{\pi,\psi(q(1))}"] \\
& \mathcal{B}(\mathcal{H})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T \arrow[d, "\tau_{\pi,\psi(q(1))}"] \\
\psi(q(1)).
\end{tikzcd}
$$

Además, si $a \in A$, tenemos que

$$
\tau_{\pi,\psi(q(1))}(\psi_T(q(a))) = \tau_{\pi,\psi(q(1))}(j_A(a)T) = \pi(a)\psi(q(1)) = \psi(q(a)),
$$

de modo que $\tau_{\pi,\psi(q(1))} \circ \psi_T = \psi$. Por lo tanto, si denotamos por $\psi \times_{K_\alpha} \pi$ al homomorfismo $\tau_{\pi,\psi(q(1))}$, entonces $\psi \times_{K_\alpha} \pi$ cumple la primera condición de la proposición. Como $\psi(M_{\mathcal{L}}) \cup j_A(A)$ genera $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$, también se verifica la segunda condición de dicha proposición 4.2.12, y por lo tanto existe un isomorfismo $\theta : \mathcal{O}(K_\alpha, M_{\mathcal{L}}) \to A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ que satisface las condiciones del enunciado. □

Corolario 5.2.9. *Si $\alpha(1) = 1$, entonces $K_\alpha = A\mathcal{R}A \cap J(M_{\mathcal{L}}) = J(M_{\mathcal{L}})$ y entonces por la observación 4.2.8, $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} \cong \mathcal{O}(M_{\mathcal{L}})$.*

5.3. Inyectividad del mapa $j_A : A \to A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$.

Definición 5.3.1. Sea I un ideal de A. Decimos que el operador de transferencia $\mathcal{L}$ es

- *fiel* en I si las condiciones $a \in I$ y $\mathcal{L}(a^*a) = 0$ implican que $a = 0$.
- *casi fiel* en I si las condiciones $a \in I$ y $\mathcal{L}((ab)^*ab) = 0$ para todo b en A implican que $a = 0$.

Teorema 5.3.2. *El mapa $j_A : A \to A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ es inyectivo si y sólo si $\mathcal{L}$ es casi fiel en el ideal K_α.*

Demostración. Por la proposición anterior, j_A es inyectivo si y sólo si $k_A : A \to \mathcal{O}(K_\alpha, M_{\mathcal{L}})$ lo es. Además, por el teorema 4.2.15, esto ocurre si y sólo si $\phi|_{K_\alpha} : K_\alpha \to \mathfrak{L}(M_{\mathcal{L}})$ es inyectivo.

Si $a \in K_\alpha$ y $b \in A$, tenemos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}((ab)^*ab)\| &= \|\langle q(ab), q(ab)\rangle_{\mathcal{L}}\| = \|q(ab)\|_{\mathcal{L}}^2 = \|a \cdot q(b)\|_{\mathcal{L}}^2 = \|\phi(a)q(b)\|_{\mathcal{L}}^2 \\ &= \|\phi|_{K_\alpha}(a)q(b)\|_{\mathcal{L}}^2, \end{aligned}$$

y esto implica la equivalencia deseada. □

Corolario 5.3.3. *Supongamos que A es conmutativa. Entonces j_A es inyectivo si y sólo si $\mathcal{L}$ es fiel en K_α.*

Demostración. La implicancia "si" es evidente. Supongamos que j_A es inyectivo, de modo que $\mathcal{L}$ es casi fiel en K_α. Sea a en A tal que $\mathcal{L}(a^*a) = 0$. Entonces, para todo b en K_α se tiene

$$\|\mathcal{L}((ab)^*ab)\| = \|\mathcal{L}((ba)^*ba)\| = \|\mathcal{L}(a^*b^*ba)\| \leq \|b\|^2\|\mathcal{L}(a^*a)\| = 0,$$

de modo que $\mathcal{L}((ab)^*ab) = 0$ y así $a = 0$. □

Observación 5.3.4. En su artículo, Exel probó que j_A es inyectivo cuando α es inyectivo y $E := \alpha \circ \mathcal{L}$, que es una esperanza condicional de A en $\mathcal{R} = \alpha(A)$, satisface que si $a \in A$ y $E(a^*a) = 0$, entonces $a = 0$. A un operador de transferencia $\mathcal{L}$ con esa propiedad Exel le llama operador de transferencia *no degenerado.* Este resultado se deduce del teorema 5.3.2: un operador de transferencia no degenerado es fiel en todo A. En efecto, si $a \in A$ y $0 = \mathcal{L}(a^*a) = \alpha^{-1}(E(a^*a))$, entonces $E(a^*a) = 0$ y así $a = 0$.

5.3.1. Ejemplos.

En este apartado presentamos algunos ejemplos que muestran cómo utilizar el teorema 5.3.2 para decidir cuándo existe una copia fiel del álgebra A en el producto cruzado. Estos ejemplos muestran, asimismo, que el teorema mencionado representa un criterio sensiblemente más fino que los presentados por Exel en ciertos casos particulares, como el referido en la observación 5.3.4.

Ejemplo 8. Este es un ejemplo en el que el endomorfismo $\alpha : A \to A$ no es unital. Sean $A = c := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \text{ existe } \lim_n x(n)\}$ el espacio de las sucesiones convergentes, con la norma del supremo, y $\alpha = S$ el shift. Entonces, $\mathcal{L} = S^*$ es un operador de transferencia para (c, S):

$$S^*(S(x)y)(n) = x(n)y(n+1) = (xS^*(y))\,(n).$$

Por otro lado, si $x \in c$, $\langle x, x\rangle_{S^*}(n) = S^*(x^*x)(n) = x^*x(n+1)$, y por lo tanto $\|\langle x, x\rangle_{S^*}\| = 0$ si y sólo si $x(n) = 0$ para $n > 0$, es decir, si y sólo si $x \in \mathbb{C}e_0$. Por lo tanto, $M_{S^*} = c/\mathbb{C}e_0$.

Como la multiplicación a izquierda en M_{S^*} por un elemento de c es un operador compacto, tenemos que $J(M_{S^*}) = c$. Asimismo, como $\mathcal{R} = S(c) = \{x \in c : x(0) = 0\}$, concluimos que $K_S = \{x \in c : x(0) = 0\}$.

Los cálculos anteriores permiten concluir que $\mathcal{L} = S^*$ es fiel en K_S, pero no en todo c. El corolario 5.3.3 implica que $j_c : c \to c \rtimes_{S,S^*} \mathbb{N}$ es inyectivo.

Ejemplo 9. Este es un ejemplo en el que el endomorfismo $\alpha : A \to A$ no es inyectivo. De nuevo el álgebra A es c, pero tomamos como endomorfismo $\alpha = S^*$, que admite como operador de transferencia al shift: $\mathcal{L} = S$. En este caso, $M_S = c$ pues S es una isometría y por lo tanto $\|S(x^*x)\| = 0$ implica $x^*x = 0$, es decir, $x = 0$. Además, se tiene que $J(M_S) = c$ y asimismo $K_{S^*} = c$. En este ejemplo, $\mathcal{L} = S$ es fiel en K_{S^*}, y por lo tanto el corolario 5.3.3 de nuevo implica que $j_c : c \to c \rtimes_{S^*,S} \mathbb{N}$ es inyectivo.

Ejemplo 10. Este es un ejemplo de una C^*-álgebra conmutativa con un operador de transferencia $\mathcal{L}$ que no es fiel en K_α, de modo que A no es una C^*-subálgebra de $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$.

Sean $A = C([0,2])$ con la norma del supremo, y $\alpha : C([0,2]) \to C([0,2])$ dada por

$$\alpha(f)(x) = \begin{cases} f(2x), & \text{si } x \in [0,1]; \\ f(4-2x), & \text{si } x \in (1,2]. \end{cases}$$

Entonces el mapa $\mathcal{L} : C([0,2]) \to C([0,2])$ definido por $\mathcal{L}(f)(x) = f(\frac{x}{2})$ es un operador de transferencia para el par $(C([0,2]), \alpha)$. Para el cálculo de $M_{\mathcal{L}}$, debemos observar que

$$\begin{aligned} N &= \{f \in C([0,2]) : \mathcal{L}(f^*f) = 0\} \\ &= \{f \in C([0,2]) : f|_{[0,1]} = 0\}. \end{aligned}$$

Así, la restricción $r : C([0,2]) \to C([0,1]), f \mapsto f|_{[0,1]}$ induce un isomorfismo de espacios vectoriales entre $C([0,2])/N$ y $C([0,1])$, que transforma la estructura de bimódulo en

$$\langle g, h\rangle_{\mathcal{L}}(x) = \overline{g\left(\frac{x}{2}\right)}h\left(\frac{x}{2}\right); \quad g \cdot f(x) = g(x)f(2x); \quad f \cdot g(x) = f(x)g(x),$$

para f, g en $C([0,2])$ y f en $A = C([0,2])$. De la primera identidad se deduce que r es una isometría, de modo que $A_{\mathcal{L}}/N$ es completo y por lo tanto $M_{\mathcal{L}} = A_{\mathcal{L}}/N$.

Ahora, para f en A y x en $[0,1]$, tenemos que

$$\theta_{r(f),1}(g)(x) = r(f)(x)\langle 1, g\rangle_{\mathcal{L}}(2x) = f(x)g(x) = (\phi(f)g)(x),$$

por lo que $f \in J(M_{\mathcal{L}})$, y así $J(M_{\mathcal{L}}) = A$, lo cual implica que $K_\alpha = A$ ya que $\alpha(1) = 1$ y $\mathcal{R} = A$.

El operador de transferencia $\mathcal{L}$ no es fiel en $C([0,2])$: cualquier función $f \in C([0,2])$ cuya restricción al intervalo $[0,1]$ sea idénticamente nula verificará $\mathcal{L}(f^*f) = 0$. Del corolario 5.3.3 se deduce que el mapa canónico $C([0,2]) \to C([0,2]) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ no es inyectivo.

5.4. Teorema de unicidad de invarianza canónica.

Usando el isomorfismo $\theta : \mathcal{O}(K_\alpha, M_{\mathcal{L}}) \to A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ del teorema 5.2.8, obtenemos una acción canónica natural $\delta : \mathbb{T} \to \operatorname{Aut}(A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N})$ tal que para cada z en $\mathbb{T}$ se tienen $\delta_z(j_A(a)) = j_A(a), \delta_z(T) = zT$ y $\theta \circ \gamma_z = \delta_z \circ \theta$. Esto último equivale a que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(K_\alpha, M_{\mathcal{L}}) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\gamma_z"'] & A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} \arrow[d, "\delta_z"] \\ \mathcal{O}(K_\alpha, M_{\mathcal{L}}) \arrow[r, "\theta"'] & A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} \end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

Teorema 5.4.1. *Sean B una C^*-álgebra y (ρ, V) una representación covariante de $(A, \alpha, \mathcal{L})$ en B que satisface*

1. *para cada a en A, si $\rho(a) = 0$ entonces $j_A(a) = 0$;*
2. *si $\rho(a) \in (\psi_V, \rho)^{(1)}(\mathcal{K}(M_{\mathcal{L}}))$, entonces $j_A(a) \in j_A(K_\alpha)$; y*
3. *existe una acción canónica fuertemente continua $\beta : \mathbb{T} \to \operatorname{Aut} \tau_{\rho,V}(A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N})$ tal que para cada z en $\mathbb{T}$, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} \arrow[r, "\delta_z"] \arrow[d, "\tau_{\rho,V}"'] & A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} \arrow[d, "\tau_{\rho,V}"] \\ \tau_{\rho,V}(A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}) \arrow[r, "\beta_z"'] & \tau_{\rho,V}(A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}) \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Entonces el homomorfismo $\tau_{\rho,V} : A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} \to B$ es inyectivo.

Demostración. Probaremos que $\tau_{\rho,V} \circ \theta$ satisface las condiciones que verifica el homomorfismo μ del teorema 4.2.18.

Sea a en A tal que $(\tau_{\rho,V})(k_A(a)) = 0$. Entonces

$$\rho(a) = \tau_{\rho,V}(j_A(a)) = \tau_{\rho,V}(\theta(k_A(a))) = 0,$$

y por la primera condición del enunciado, concluimos que $j_A(a) = 0$. Como $k_A = \theta^{-1} \circ j_A$, lo anterior implica que $k_A(a) = 0$ y así $\tau_{\rho,V} \circ \theta$ es inyectivo en $k_A(A)$.

Sea ahora a en A que satisface $(\tau_{\rho,V} \circ \theta)(k_A(a)) \in (\tau_{\rho,V} \circ \theta)\big((k_{M_\mathcal{L}}, k_A)^{(1)}(\mathcal{K}(M_\mathcal{L}))\big)$. Como $(\tau_{\rho,V} \circ \theta)(k_A(a)) = \rho(a)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
(\tau_{\rho,V} \circ \theta)\Big((k_{M_\mathcal{L}}, k_A)^{(1)}(\mathcal{K}(M_\mathcal{L}))\Big) &= \tau_{\rho,V}\Big((\theta \circ k_{M_\mathcal{L}}, \theta \circ k_A)^{(1)}(\mathcal{K}(M_\mathcal{L}))\Big) \\
&= \tau_{\rho,V}\Big((\psi_T, j_A)^{(1)}(\mathcal{K}(M_\mathcal{L}))\Big) \\
&= \tau_{\rho,V} \circ Q\Big((\psi_S, i_A)^{(1)}(\mathcal{K}(M_\mathcal{L}))\Big) \\
&= (\rho \times V)\Big((\psi_S, i_A)^{(1)}(\mathcal{K}(M_\mathcal{L}))\Big) \\
&= (\psi_V, \rho)^{(1)}(\mathcal{K}(M_\mathcal{L})).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\rho(a) \in (\psi_V, \rho)^{(1)}(\mathcal{K}(M_\mathcal{L}))$, y de la segunda condición del enunciado se deduce que $j_A(a) \in j_A(K_\alpha)$. Componiendo con el isomorfismo θ obtenemos que $k_A(a) \in k_A(K_\alpha)$.

Finalmente, la tercera condición del enunciado permite concluir que

$$\beta_z \circ \tau_{\rho,V} \circ \theta = \tau_{\rho,V} \circ \delta_z \circ \theta = \tau_{\rho,V} \circ \theta \circ \gamma_z.$$

El teorema 4.2.18 permite afirmar que $\tau_{\rho,V} \circ \theta$ es inyectivo, lo cual implica que $\tau_{\rho,V}$ es inyectivo. $\square$

Cuando el operador de transferencia $\mathcal{L}$ es casi fiel en K_α, el teorema 5.3.2 implica que el mapa $j_A : A \to A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ es inyectivo. En este contexto, se puede dar una versión más refinada del teorema anterior.

Corolario 5.4.2. *Supongamos que el operador de transferencia $\mathcal{L}$ es casi fiel en K_α, y sean B una C^*-álgebra y (ρ, V) una representación covariante de $(A, \alpha, \mathcal{L})$ en B que satisface*

1. *ρ es fiel;*
2. *para a en $J(M_\mathcal{L})$, $\rho(a) = (\psi_V, \rho)^{(1)}(\phi(a))$ implica que $j_A(a) = (\psi_T, j_A)^{(1)}(\phi(a))$; y*
3. *existe una acción canónica fuertemente continua $\beta : \mathbb{T} \to \operatorname{Aut} \tau_{\rho,V}(A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N})$ tal que para cada z en $\mathbb{T}$, el diagrama*

$$\begin{array}{ccc}
A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} & \xrightarrow{\delta_z} & A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} \\
{\scriptstyle \tau_{\rho,V}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \tau_{\rho,V}} \\
\tau_{\rho,V}(A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}) & \xrightarrow[\beta_z]{} & \tau_{\rho,V}(A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N})
\end{array}$$

es conmutativo.

Entonces el homomorfismo $\tau_{\rho,V} : A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} \to B$ es inyectivo.

Demostración. Veamos que las condiciones (1) y (2) de este corolario implican las condiciones (1) y (2) del teorema 5.4.1.

Es directo verificar que la primera condición de este corolario implica la primera condición del teorema, ya que j_A es inyectiva.

Por otro lado, sean $a \in A, b \in J(M_\mathcal{L})$ que satisfacen $\rho(a) = (\psi_V, \rho)^{(1)}(\phi(b))$. Como ρ es inyectiva, el lema 4.2.17 permite afirmar que a es un elemento de $J(M_\mathcal{L})$ y que $\rho(a) = (\psi_V, \rho)^{(1)}(\phi(a))$. La segunda hipótesis en este corolario asegura que debe ser $j_A(a) = (\psi_A, j_A)^{(1)}(\phi(a))$, y por el lema 4.2.16, es $a \in K_\alpha$.

Finalmente, podemos aplicar el teorema 5.4.1 para obtener el resultado deseado. $\square$

Capítulo 6

Productos cruzados de sistemas dinámicos clásicos.

Un sistema dinámico (reversible) generado por un homeomorfismo de un espacio compacto y de Hausdorff determina el producto cruzado de la C^*-álgebra de las funciones continuas sobre dicho espacio por la acción del grupo de los enteros via la composición de las funciones continuas con los iterados del homeomorfismo original. La interacción entre las propiedades topológicas del sistema dinámico, tales como la minimalidad, la irreducibilidad o la libertad topológica, y las propiedades analítico-algebraicas del producto cruzado, como la estructura de ideales y subálgebras o la simplicidad, han sido el objeto de intensas investigaciones desde la década de los sesenta.

En los años recientes, y sin contar con una definición satisfactoria del producto cruzado por un endomorfismo, se ha hecho un gran esfuerzo por establecer relaciones similares a las identificadas para sistemas dinámicos reversibles, pero esta vez para sistemas dinámicos *irreversibles*, es decir, sistemas dinámicos generados por mapas continuos, sin asumir inyectividad ni sobreyectividad.

Dada la gran dificultad que este problema presenta, en la búsqueda de relaciones claras entre dinámica y análisis para sistemas irreversibles, es común asumir que el mapa que genera el sistema dinámico es un mapa de recubrimiento, esto es, un homeomorfismo local sobreyectivo.

En este capítulo avanzaremos en esta dirección, exponiendo algunos de los resultados disponibles para el producto cruzado definido por Exel. Nos concentraremos en analizar las relaciones existentes entre ciertas hipótesis de minimalidad del sistema dinámico con la estructura de ideales del producto cruzado. Una de las motivaciones básicas para la búsqueda de este tipo de resultados es el teorema que enunciamos a continuación, que establece relaciones como las antes mencionadas para el producto cruzado que surge de un sistema dinámico generado por un homeomorfismo de un espacio compacto.

Teorema 6.0.3. *Sean X un espacio compacto y σ un homeomorfismo de X en sí mismo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Los puntos no periódicos de σ son densos en X.*
2. *Cualquier ideal no trivial I del producto cruzado $C(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ tiene intersección no trivial con la copia de $C(X)$ que hay en el producto cruzado.*

3. La copia de $C(X)$ es una C^*-subálgebra abeliana maximal de $C(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$.

Una demostración de este teorema se puede encontrar en el libro de Tomiyama [19].

Comenzamos este capítulo definiendo los sistemas dinámicos clásicos y utilizamos los resultados presentados en capítulos anteriores para obtener las primeras propiedades de los productos cruzados determinados por estos sistemas. A modo de ejemplo, estos productos cruzados pueden identificarse como álgebras de Cuntz-Pimsner como las introducidas en [16], y el mapa canónico $j_{C(X)} \to C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ es siempre inyectivo.

A continuación, dejamos de lado el caso conmutativo y nos concentramos en el caso en que el rango del endomorfismo considerado admite una esperanza condicional *de índice finito*, de acuerdo a [20]. Mostramos primero que el proceso de eliminación de las redundancias se alcanza introduciendo una única relación adicional, obteniendo así una presentación muy concreta del producto cruzado en términos de generadores y relaciones.

Posteriormente, verificamos que los sistemas dinámicos clásicos tienen índice finito, y en consecuencia obtenemos una descripción aún más concisa del producto cruzado en este contexto. También obtenemos un resultado acerca de la fidelidad de las representaciones bajo la hipótesis de libertad topológica. Además de dar una descripción muy concreta de la estructura de ideales en un caso especial, mostramos que el producto cruzado es simple si y sólo si el mapa en el espectro es irreducible, en el sentido de que no admite subconjuntos propios cerrados e invariantes. Este resultado representa un refinamiento de la correspondiente caracterización de la simplicidad establecida por Deaconu, ya que la noción que manejamos de irreducibilidad es ciertamente más débil que la noción de minimalidad que Deaconu utilizó. Cerramos el capítulo mostrando que en el caso de un sistema topológicamente libre, la primalidad del producto cruzado es equivalente a la transitividad del sistema dinámico en cuestión.

La hipótesis de que el mapa en el espectro sea un mapa de recubrimiento está directamente relacionada con la finitud del ínidce del endomorfismo asociado, que a su vez es el responsable de la existencia de una esperanza condicional del producto cruzado sobre $C(X)$ (teorema 6.2.8). Como esta esperanza condicional resulta ser una de las herramientas fundamentales al momento de probar los teoremas más importantes de este capítulo, nuestros métodos son absolutamente inválidos en el caso en que el índice no sea finito. Por lo tanto, problemas como la caracterización de la simplicidad en términos del sistema dinámico en el caso de índice infinito, son algunas de las principales preguntas que quedan sin responder.

Las principales referencias para este capítulo son el artículo de Exel y Vershik [11]; el de Carlsen y Silvestrov [6]; y el de Brownlowe, Raeburn y Vittadello [5].

6.1. Sistemas dinámicos clásicos.

Definición 6.1.1. Un *sistema (dinámico) clásico* consiste en un par (X, σ), donde X es un espacio topológico compacto y de Hausdorff, y $\sigma : X \to X$ es un homeomorfismo local sobreyectivo.

Asociado al sistema clásico (X, σ) tenemos un C^*-sistema dinámico conmutativo: la C^*-álgebra es $A = C(X)$ y el endomorfismo de A está dado por $\alpha(f) = f \circ \sigma$, para toda f en $C(X)$. Observar que α es un endomorfismo unital, y que la sobreyectividad de σ equivale a la inyectividad de α.

También tenemos una forma canónica de definir un operador de transferencia para $(C(X), \alpha)$, que esencialmente consiste en promediar sobre las preimágenes por σ. Concretamente, el operador de transferencia que escogeremos tendrá la forma

$$\mathcal{L}(f)(x) = \frac{1}{|\sigma^{-1}(x)|} \sum_{\{y \in X : \sigma(y) = x\}} f(y),$$

para todos x en X y f en $C(X)$. Tenemos que verificar que la fórmula anterior efectivamente define un mapa de $C(X)$ en sí mismo, lo cual dependerá del hecho de que σ es un homeomorfismo local.

Lema 6.1.2. *Sea (X, σ) un sistema clásico. Entonces, para cada f en $C(X)$, la función $\mathcal{L}(f) : X \to \mathbb{C}$ dada por*

$$\mathcal{L}(f)(x) = \frac{1}{|\sigma^{-1}(x)|} \sum_{\{y \in X : \sigma(y) = x\}} f(y),$$

es continua en X.

Demostración. Dado x_0 en X, sea W un entorno de x_0 tal que $\sigma^{-1}(W)$ se escribe como una unión disjunta de abiertos $U_1, \ldots, U_n$, de forma que $\sigma|_{U_i} : U_i \to W$ es un homeomorfismo, cuya inversa denotamos por $\phi_i : W \to U_i$.

Para cada x en W, tenemos que $\sigma^{-1}(x) = \{\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)\}$, y por lo tanto,

$$\mathcal{L}(f)(x) = \frac{1}{|\sigma^{-1}(x)|} \sum_{i=1}^{n} f(\phi_i(x)),$$

de modo que $\mathcal{L}(f)$ es continua en x_0. Como este punto es arbitrario, concluimos que $\mathcal{L}(f)$ es continua en X. $\square$

De aquí en más fijamos un sistema clásico (X, σ) y el operador de transferencia $\mathcal{L}$ definido en el párrafo anterior. Además, para cada x en X, denotamos por $\delta(x)$ al número natural $|\sigma^{-1}(\sigma(x))|$. Así, $\delta(x)$ es localmente constante, y $\delta : X \to \mathbb{C}$ definida por $x \mapsto \delta(x)$ es una función continua y no nula, que a cada x de X le asigna la cantidad de puntos de X que tienen la misma imagen por σ que x.

Lema 6.1.3. *Sea $\phi : C(X) \to \mathfrak{L}(M_{\mathcal{L}})$ el homomorfismo que define la acción a izquierda de $C(X)$ en $M_{\mathcal{L}}$. Entonces el rango de ϕ está contenido en los operadores compactos de $M_{\mathcal{L}}$. En otras palabras, $J(M_{\mathcal{L}}) = A$.*

Demostración. Dada f en $C(X)$, sean $\{U_i\}_{i=1}^n$ un cubrimiento finito de X tal que $\sigma|_{U_i}$ es un homeomorfismo sobre su imagen, y $\{\rho_i\}_{i=1}^n$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{U_i\}_{i=1}^n$. Para $i = 1, \ldots, n$, definimos $u_i \in C(X)$ por

$$u_i(x) = (\delta(x)\rho_i(x))^{\frac{1}{2}},$$

para todo x en X. Entonces, si h es una función de $C(X)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\theta_{fu_i,u_i}(h)(x) &= f(x)u_i(x)\mathcal{L}(u_i^*h)(x) = f(x)u_i(x)\frac{1}{|\sigma^{-1}(\sigma(x))|}\sum_{\{y\in X:\sigma(y)=\sigma(x)\}} u_i(y)h(y)\\ &= f(x)\rho_i(x)h(x),\end{aligned}$$

de modo que $\phi(f) = \sum_{i=1}^n \theta_{fu_i,u_i}$ que es de rango finito y en particular compacto. □

Corolario 6.1.4. *$K_\alpha = J(M_\mathcal{L}) \cap A\alpha(A)A = A$, ya que $\alpha(1) = 1$ y el rango de ϕ está contenido en $\mathcal{K}(M_\mathcal{L})$.*

Corolario 6.1.5. *El producto cruzado asociado a un sistema clásico es isomorfo al álgebra de Cuntz-Pimsner de la correspondencia $M_\mathcal{L}$: $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} \cong \mathcal{O}(M_\mathcal{L})$.*

Demostración. Es inmediato a partir del corolario anterior y el hecho de que si X es una correspondencia, el álgebra de Cuntz-Pimsner relativa al ideal $J(X)$ coincide con el álgebra de Pimsner de X (ver la observación 4.2.8). □

Proposición 6.1.6. *La acción izquierda de $M_\mathcal{L}$, que está dada por el homomorfismo $\phi : C(X) \to \mathfrak{L}(M_\mathcal{L})$ es fiel.*

Demostración. Dada f en $C(X)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f^*f) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{\{y\in X:\sigma(y)=x\}} |f(y)|^2 = 0 \quad \text{para todo } x \in X\\ &\Leftrightarrow \quad |f(y)|^2 = 0 \quad \text{para todo } y \in X \Leftrightarrow f = 0,\end{aligned}$$

de modo que $\mathcal{L}$ es fiel en $C(X)$. □

Corolario 6.1.7. *La correspondencia $M_\mathcal{L}$ es simplemente $C(X)$ como espacio vectorial, con la acción izquierda dada por la multiplicación, la acción derecha dada por $f \cdot g = f\alpha(g)$ para f en $M_\mathcal{L} = C(X)$ y g en $C(X)$, y el producto interno dado por $\langle f, g\rangle_\mathcal{L} = \mathcal{L}(f^*g)$ para f, g en $M_\mathcal{L}$.*

Demostración. Como el espacio $N = \{f \in C(X) : \mathcal{L}(f^*f) = 0\}$ es trivial, alcanza con ver que las normas $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_\mathcal{L}$ son equivalentes, de modo que $C(X)$ sea completo con esta última.

Por un lado, es claro que $\|f\|_\mathcal{L} = \|\mathcal{L}(f^*f)^{\frac{1}{2}}\|_\infty =\leq \|f\|_\infty$. Por otro lado, sean $p = \max_{x\in X} |\sigma^{-1}(x)|$, f en $C(X)$ y z en X tal que $|f(z)| = \|f\|_\infty$. Entonces

$$\|f\|_\mathcal{L}^2 = \max_{x\in X} \mathcal{L}(f^*f)(x) =\geq \mathcal{L}(f^*f)(z) = \frac{1}{\sigma^{-1}(x)} \left\| \sum_{\sigma(y)=z} f^*f(y) \right\| \geq \frac{1}{p} f^*f(z) = \frac{1}{p}\|f\|_\infty^2$$

y por lo tanto $\|\cdot\|_\mathcal{L} \geq \frac{1}{\sqrt{p}}\|\cdot\|_\infty$, lo que concluye la prueba. □

Corolario 6.1.8. *El mapa canónico $j_{C(X)} : C(X) \to C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ es inyectivo.*

Demostración. En virtud del corolario 5.3.3, basta verificar que $\mathcal{L}$ es fiel en $K_\alpha = C(X)$, y éste es precisamente el contenido de la proposición anterior. □

Observación 6.1.9. El álgebra $C(X)$ está generada por los productos internos $\langle m, n\rangle_\mathcal{L}$ con m y n en $M_\mathcal{L}$.

Demostración. Sea f en $C(X)$. Como $\mathcal{L}$ es sobreyectivo, existe g en $C(X)$ tal que $f = \mathcal{L}(g)$. Entonces

$$\langle 1, g\rangle_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(1^* g) = \mathcal{L}(g) = f.$$

□

Cerramos esta sección con un resultado que además de ser interesante en sí mismo, será de utilidad más adelante. El mismo es válido en un contexto más general que el de los sistemas clásicos y muestra cómo los ideales *invariantes* del álgebra tienen asociados ideales del producto cruzado.

Proposición 6.1.10. *Sean A una C^*-álgebra unital, α un endomorfismo unital y $\mathcal{L}$ un operador de transferencia tal que $\mathcal{L}(1) = 1$. Supongamos que I es un ideal de A tal que $\alpha(I) \subseteq I$ y $\mathcal{L}(I) \subseteq I$, y denotemos por $\overline{\alpha}$ y $\overline{\mathcal{L}}$ a los mapas inducidos por α y $\mathcal{L}$ en A/I respectivamente. Entonces existe un ideal J de $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ tal que $J \cap A = I$ y además*

$$(A/I) \rtimes_{\overline{\alpha},\overline{\mathcal{L}}} \mathbb{N} \cong \frac{A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}}{J}.$$

Demostración. Sea $\overline{S}$ la isometría que junto con A/I genera el álgebra $(A/I) \rtimes_{\overline{\alpha},\overline{\mathcal{L}}} \mathbb{N}$. Consideramos el mapa cociente como un homomorfismo

$$q : A \to A/I \subseteq (A/I) \rtimes_{\overline{\alpha},\overline{\mathcal{L}}} \mathbb{N}.$$

Es claro que $\overline{S}q(a) = q(\alpha(a))\overline{S}$ y $\overline{S}^* q(a)\overline{S} = q(\mathcal{L}(a))$ para todo a en A. Esto implica la existencia de un homomorfismo $\phi : \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L}) \to (A/I) \rtimes_{\overline{\alpha},\overline{\mathcal{L}}} \mathbb{N}$ tal que $\phi(i_A(a)) = q(a)$ para todo a en A, y $\phi(S) = \overline{S}$.

Si (a, k) es una redundancia en $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$, entonces $q(a)q(b)\overline{S} = \phi(k)q(b)\overline{S}$, y por lo tanto $((q(a), \phi(k))$ es también una redundancia. En consecuencia, ϕ se anula en el ideal generado por las redundancias, e induce un mapa en el cociente

$$\psi : A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} \to (A/I) \rtimes_{\overline{\alpha},\overline{\mathcal{L}}} \mathbb{N}$$

que coincide con q en la copia de A en $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$, y que es claramente sobreyectivo. Finalmente, $J = \ker \psi$ es el ideal buscado. □

6.2. Endomorfismos de índice finito.

En esta sección, exponemos algunos resultados disponibles en cierta situación particular del contexto no conmutativo, a saber, el caso de un endomorfismo de índice finito. A continuación verificaremos que los sistemas dinámicos clásicos siempre dan lugar a C^*-sistemas dinámicos con esta propiedad, y como consecuencia de ello deduciremos propiedades importantes de los productos cruzados asociados a estos sistemas.

Concretamente mostraremos que, bajo ciertas hipótesis que están siempre presentes en el caso de los sistemas dinámicos clásicos, el ideal generado por las redundancias es un ideal principal, es decir, está generado por un solo elemento. En ese caso, el producto cruzado admite una descripción más concreta que en el caso general.

Fijamos una C^*-álgebra unital A, un endomorfismo α y un operador de transferencia $\mathcal{L}$. Supondremos que α es inyectivo y unital, y que el operador de transferencia está normalizado, en el sentido que $\mathcal{L}(1) = 1$. Denotaremos por E a la esperanza condicional $E = \alpha \circ \mathcal{L}$.

Observemos que la elección de un operador de transferencia que preserva la unidad sólo es posible cuando α es inyectiva, ya que de poder elegirlo de esa forma, obtenemos que $\mathcal{L}(\alpha(a)) = a$ para todo a en A, es decir, $\mathcal{L}$ es una inversa a izquierda de α.

Observemos también que estas hipótesis se verifican siempre en el caso de los sistemas dinámicos clásicos descritos en la sección anterior.

Definición 6.2.1. Sean B una C^*-álgebra y $F : B \to B$ un operador lineal positivo. Decimos que F es de *índice finito* si existe una *casi base* para F, es decir, un conjunto finito $\{u_1, \ldots, u_m\} \subseteq B$ tal que para todo b en B se cumple que

$$b = \sum_{i=1}^{m} u_i F(u_i^* b).$$

En este caso, el *índice* de F es $ind(F) = \sum_{i=1}^{m} u_i u_i^*$.

Observación 6.2.2. Puede demostrarse que $ind(F)$ no depende de la elección de la casi base $\{u_1, \ldots, u_m\}$, que pertenece al centro de B y que es invertible. Ver [20].

De aquí en adelante asumiremos que la esperanza condicional E es de índice finito, y denotaremos por $\{u_1, \ldots, u_m\} \subseteq A$ a una casi base de E. En este contexto, es usual hacer un abuso del lenguaje y en lugar de decir que la esperanza condicional asociada al sistema $(A, \alpha, \mathcal{L})$ es de índice finito, decimos simplemente que α es un endomorfismo de índice finito.

Un primer resultado destacable es que bajo las hipótesis actuales, el proceso de eliminar todas las redundancias de $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ en la definición de $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ se consigue agregando una única relación a las que definen el álgebra $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$.

Proposición 6.2.3. *Sea k_0 el elemento de $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ dado por $k_0 = \sum_{i=1}^{m} u_i SS^* u_i^*$. Entonces $(1, k_0)$ es una redundancia y por lo tanto,*

$$1 = \sum_{i=1}^{m} u_i SS^* u_i^*$$

en $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$.

Además, el ideal generado por las redundancias $\mathcal{I}(A, \alpha, \mathcal{L})$ coincide con el ideal generado por $1 - k_0$.

Demostración. Verifiquemos primero que $(1, k_0)$ es una redundancia. Dado b en A, tenemos que

$$k_0 bS = \sum_{i=1}^{m} u_i SS^* u_i^* bS = \sum_{i=1}^{m} S\mathcal{L}(u_i^* b) = \sum_{i=1}^{m} u_i \alpha(\mathcal{L}(u_i^* b))S = \sum_{i=1}^{m} u_i E(u_i^* b)S = bS,$$

lo que prueba la primera afirmación.

Sea ahora (a, k) otra redundancia. Entonces

$$kk_0 = \sum_{i=1}^{m} k u_i SS^* u_i^* = \sum_{i=1}^{m} a u_i SS^* u_i^* = ak_0,$$

de modo que $a - k = (a - k)(1 - k_0)$, y por lo tanto, $a - k$ pertenece al ideal generado por $1 - k_0$. $\square$

Como consecuencia, obtenemos una descripción más explícita del producto cruzado en este contexto.

Corolario 6.2.4. *El producto cruzado $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ es la C^*-álgebra universal generada por una copia de A y una isometría S sujetos a las relaciones*

1. $Sa = \alpha(a)S$,
2. $S^*aS = \mathcal{L}(a)$,
3. $1 = \sum_{i=1}^m u_i SS^* u_i^*$,

para todo a en A.

6.2.1. Existencia de casi bases para sistemas dinámicos clásicos.

Fijamos nuevamente un sistema clásico (X, σ), y consideramos el endomorfismo α y el operador de transferencia $\mathcal{L}$ en $C(X)$ definidos en la sección anterior. Nuestro objetivo es demostrar que la esperanza condicional que surge en un sistema clásico siempre tiene índice finito. Esto nos habilitará a invocar el corolario 6.2.4 al estar frente a un sistema dinámico clásico, y así poder trabajar con una descripción más concreta de su producto cruzado.

Proposición 6.2.5. *Sean $\{V_i\}_{i=1}^m$ un cubrimiento finito de X tal que la restricción de σ a cada U_i es un homeomorfismo sobre su imagen, y $\{\rho_i\}_{i=1}^m$ una partición de la unidad subordinada a este cubrimiento. Al igual que en lema 6.1.3, definimos $u_i = (\delta\rho_i)^{\frac{1}{2}}$ para cada $i = 1, \ldots, m$. Entonces $\{u_i\}_{i=1}^m$ es una casi base para E, que resulta de índice finito. Además, $Ind(E) = \delta$.*

Demostración. Observemos que $u_i^* = u_i$. Sea x en X. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m u_i E(u_i f)(x) &= \sum_{i=1}^m u_i(x) \frac{1}{\delta(x)} \sum_{\sigma^{-1}(\sigma(x))} u_i(t) f(t) = \sum_{i=1}^m u_i(x) \frac{1}{\delta(x)} u_i(x) f(x) \\
&= \sum_{i=1}^m \rho_i(x) f(x) = f(x),
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se usó el hecho de que en cada V_i hay una única preimagen de $\sigma(x)$, que debe ser x si $u_i(x) \neq 0$. De esto concluimos que $\{u_i\}_{i=1}^m$ es una casi base para E. Por último,

$$Ind(E) = \sum_{i=1}^m u_i^2 = \sum_{i=1}^m \delta\rho_i = \delta.$$

□

6.2.2. Más resultados en el caso de endomorfismos de índice finito.

El resto de esta sección la dedicaremos a obtener algunos resultados técnicos que se desprenden de que la esperanza condicional $E = \alpha \circ \mathcal{L}$ sea de índice finito. Hacemos esto a los efectos de usar estos resultados en las secciones siguientes, además de que algunos de ellos son interesantes en sí mismos.

Al igual que antes, fijamos una C^*-álgebra unital A, un endomorfismo inyectivo, unital y de índice finito α, y un operador de transferencia unital $\mathcal{L}$. Fijamos una casi-base para E, que denotamos por $\{u_1, \ldots, u_m\}$.

Proposición 6.2.6. *Sea n en $\mathbb{N}$. Entonces*

1. $\sum_{i=1}^{m} \alpha^n(u_i)S^{n+1}S^{*n+1}\alpha^n(u_i^*) = S^nS^{*n}$.

2. $K_n \subseteq K_{n+1}$.

Demostración. Se tiene que

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha^n(u_i)S^{n+1}S^{*n+1}\alpha^n(u_i^*) = \sum_{i=1}^{m} S^n u_i SS^* u_i^* S^{*n} = S^nS^{*n},$$

lo que prueba la primera afirmación, a partir de la cual la segunda se deduce inmediatamente. □

Corolario 6.2.7. *El álgebra de puntos fijos $\mathcal{U}$ de la acción canónica (ver 2.3.10) coincide con el límite inductivo de la sucesión $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Pesentamos sin demostración el siguiente teorema, y referimos al lector al artículo de Exel [10].

Teorema 6.2.8. *(Teorema 8.9 de [10]). Existe una esperanza condicional $G : A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} \to A$ que satisface*

$$G(AS^nS^{*m}b) = \delta_{n,m}aI_n^{-1}b,$$

para todos a.b en A y n, m en $\mathbb{N}$, donde $I_n = Ind(E)\alpha(Ind(E)) \dots \alpha^{n-1}(Ind(E))$.

Proposición 6.2.9. *Sea $Z = \{1, \dots, m\}$, siendo m el cardinal de la casi base para E que está fija desde el comienzo de este apartado. Para cada $n \geq 0$ y para cada $i = (i_0, \dots, i_{n-1}) \in Z^n$, definimos*

$$u_{(i)} = u_{i_0}\alpha(u_{i_1}) \cdots \alpha^{n-1}(u_{i_{n-1}}).$$

Entonces

1. $\sum_{i\in Z^n} u_{(i)}S^nS^{*n}u_{(i)}^* = 1$.

2. *Si A es conmutativa, entonces* $\sum_{i\in Z^n} u_{(i)}u_{(i)}^* = I_n$.

Demostración. En el caso $n = 1$, el resultado se deduce de la proposición 6.2.3. Supongamos que $n > 1$ y observemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i\in Z^n} u_{(i)}S^nS^{*n}u_{(i)}^* &= \sum_{i\in Z^{n-1}} \sum_{j=1}^{m} u_{(i)}\alpha^{n-1}(u_j)S^nS^{*n}\alpha^{n-1}(u_j^*)u_{(i)}^* \\ &= \sum_{i\in Z^{n-1}} u_{(i)}S^{n-1}S^{*n-1}u_{(i)}^* = 1,\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad usamos la primera afirmación en la proposición anterior, y la última igualdad se obtiene por inducción en n.

En cuanto a la segunda afirmación, observemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i\in Z^n} u_{(i)}u_{(i)}^* &= \sum_{i\in Z^{n-1}} \sum_{j=1}^{m} u_{(i)}\alpha^{n-1}(u_j)\alpha^{n-1}(u_j^*)u_{(i)}^* \\ &= \sum_{i\in Z^{n-1}} u_{(i)}\alpha^{n-1}(Ind(E))u_{(i)}^* = \alpha^{n-1}(Ind(E)) \sum_{i\in Z^{n-1}} u_{(i)}u_{(i)}^*,\end{aligned}$$

y nuevamente un argumento inductivo demuestra la afirmación. □

Como consecuencia, la esperanza condicional $G : A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} \to A$ puede ser descrita por medio de una expresión algebraica concreta en cada K_n cuando A es conmutativa.

Corolario 6.2.10. *Supongamos que A es conmutativa. Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ existe un conjunto $\{v_1, \ldots, v_p\} \subseteq A$ tal que*

1. $G(k) = \sum_{i=1}^{p} v_i k v_i^*$ *para todo k en K_n.*
2. $\sum_{i=1}^{p} v_i v_i^* = 1$.

Demostración. Sea $\{u_{(i)}\}_{i \in Z^n}$ como en la proposición anterior, y para cada j en Z^n, sea $v_{(i)} = I_n^{-\frac{1}{2}} u_{(i)}$, siendo I_n como en el teorema 6.2.8. Entonces para cada a, b en A, se tiene

$$\sum_{j \in Z^n} v_{(i)} a S^n S^{*n} b v_{(i)}^* = a I_n^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{i \in Z^n} u_{(i)} S^n S^{*n} u_{(i)}^* \right) I_n^{-\frac{1}{2}} b = a I_n^{-1} b = G(a S^n S^{*n} b),$$

lo que prueba la primera afirmación (siendo $p = nm$). Por último, la segunda afirmación se deduce de la primeraa poniendo $k = 1$. $\square$

Proposición 6.2.11. *La restricción de la esperanza condicional G a cada K_n es fiel.*

Demostración. Sean $a_1, \ldots, a_r$ en A y $k = \sum_{i=1}^{r} a_i S^n S^{*n} a_i^* \geq 0$ en K_n tal que $G(k) = 0$ (es fácil ver que los elementos positivos de K_n deben ser de esta forma). Entonces

$$0 = G\left(\sum_{i=1}^{r} a_i S^n S^{*n} a_i^* \right) = \sum_{i=1}^{r} a_i I_n a_i^*,$$

de modo que $a_i I_n a_i^* = 0$ y $a_i I_n^{\frac{1}{2}} = 0$ para cada $i = 1, \ldots, r$. Como cada I_n es invertible, concluimos que es $a_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, r$ y por lo tanto $k = 0$. $\square$

Podemos ahora establecer una cierta propiedad de fidelidad de G en todo $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$. Antes, un lema ténico. Su demostración se puede encontrar en el artículo de Adji, Laca, Nilsen y Raeburn [2], e involucra sólo elementos de la teoría básica de C^*-álgebras.

Lema 6.2.12. *(Lema 1.3 de [2]). Sean B una C^*-álgebra, $\{B_i\}_{i \in I}$ una familia de C^*-subálgebras tal que $B = \overline{\bigcup_{i \in I} B_i}$, y J un ideal no nulo de B. Entonces $J = \overline{\bigcup_{i \in I} J \cap B_i}$. En particular, existe i en I tal que $J \cap B_i$ es no nulo.*

Proposición 6.2.13. *Sea $a \geq 0$ en $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ tal que $G(xax^*) = 0$ para todo x en $\mathcal{U}$. Entonces $a = 0$.*

Demostración. Recordemos que la esperanza condicional P de $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ sobre los puntos fijos de la acción canónica está dada por $P(w) = \int_{\mathbb{T}} \gamma_z(w) dz$, para todo w en $A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$. Así,

$$0 = G(xax^*) = G(P(xax^*)) = G(xP(a)x^*)$$

para todo x en $\mathcal{U}$. Esto nos permite suponer que a es un elemento de $\mathcal{U}$, ya que P es fiel.

Veamos que $G(xay^*) = 0$ para todos x, y en $\mathcal{U}$. La función $\langle \cdot, \cdot \rangle_a : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to A$ dada por $\langle x, y \rangle_a = G(xay^*)$ es una forma sesquilinear que satisface $\langle x, x \rangle_a = 0$ para todo x en $\mathcal{U}$. La identidad de polarización, que permite calcular $\langle x, y \rangle_a$ como una combinación lineal de elementos de la forma $\langle z, z \rangle_a$, permite concluir que $G(xay^*) = \langle x, y \rangle_a = 0$ para todos

x, y en $\mathcal{U}$.

Supongamos en $a \neq 0$. En ese caso, el ideal J de $\mathcal{U}$ dado por

$$J = \{b \in \mathcal{U} : G(xby^*) = 0 \text{ para todos } x, y \in \mathcal{U}\}$$

es no nulo. Como $\mathcal{U} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n}$, el lema anterior asegura que existen n natural y b no nulo en $J \cap K_n$. Como $G(b^*b) = 0$, la proposición 6.2.11 implica que $b = 0$, que es una contradicción. Por lo tanto, $a = 0$. □

6.3. Libertad topológica.

En numerosos trabajos de las últimas décadas, se ha observado que la libertad topológica en un sistema dinámico generado por un homeomorfismo (una forma de definirla es como en la primera afirmación del teorema 6.0.3), o por acciones de grupos más generales, está fuertemente relacionada con la estructura de ideales en el correspondiente producto cruzado. Particularmente, esta propiedad tiene como consecuencia la no trivialidad de la intersección de cada ideal del producto cruzado con la copia del álgebra original que hay en él.

Se ha comprobado también que la libertad topológica se vincula con la posición del álgebra dentro del producto cruzado; concretamente, en muchos casos ella es equivalente a que sea una subálgebra abeliana maximal.

La noción de libertad topológica para sistemas dinámicos generados por un homeomorfismo puede extenderse de forma natural a sistemas dinámicos irreversibles. En esta sección definiremos este concepto en el contexto de los sistemas clásicos, y tendremos como objetivo obtener resultados acerca de la fidelidad de las representaciones así como una aproximación hacia la estructura de los ideales del producto cruzado $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$. Presentamos también un resultado que puede interpretarse como una generalización del teorema 6.0.3 al caso de los sistemas clásicos.

Comenzamos definiendo la principal hipótesis a usar en esta sección.

Definición 6.3.1. Decimos que el sistema clásico (X, σ) es *topológicamente libre* si para todos n y m naturales distintos, el conjunto

$$\{x \in X : \sigma^n(x) = \sigma^m(x)\}$$

tiene interior vacío.

Lema 6.3.2. *Sean x_0 en X y n, m en $\mathbb{N}$ tales que $\sigma^n(x_0) \neq \sigma^m(x_0)$. Entonces existe h en $C(X)$ tal que*

1. $0 \leq h \leq 1$,
2. $h(x_0) = 1$,
3. $hS^nS^{*m}h = 0$.

Demostración. Veamos primero que existe un abierto U en X que contiene a x_0 y que satisface

$$U \cap \sigma^{-n}(\sigma^m(U)) = \emptyset.$$

En efecto, sean V, W abiertos disjuntos de X tales que $\sigma^n(x_0)$ está en V y $\sigma^m(x_0)$ está en W, y fijemos $U = \sigma^{-n}(V) \cap \sigma^{-m}(W)$. Entonces es claro que x_0 está en U y $\sigma^n(U) \cap \sigma^m(U) = \emptyset$. Además,

$$\emptyset = \sigma^{-n}\left(\sigma^n(U) \cap \sigma^m(U)\right) = \sigma^{-n}(\sigma^n(U)) \cap \sigma^{-n}(\sigma^m(U)) \supseteq U \cap \sigma^{-n}(\sigma^m(U)).$$

Sea h en $C(X)$ satisfaciendo (i) y (ii) y tal que $\mathrm{sop}(h) \subseteq U$. Entonces

$$\|hS^nS^{*m}h\|^2 = \|hS^nS^{*m}h^2S^mS^{*n}h\| = \|h\alpha^n(\mathcal{L}^m(h^2))S^nS^{*n}h\|,$$

de modo que alcanza con probar que $h\alpha^n(\mathcal{L}^m(h^2)) = 0$. Observemos que $\mathcal{L}^m$ es un operador de transferencia para α^m, y por lo tanto

$$\mathrm{sop}\left(\alpha^n(\mathcal{L}^m(h^2))\right) \subseteq \sigma^{-n}\left(\mathrm{sop}(\mathcal{L}^m(h^2))\right) \subseteq \sigma^{-n}\left(\sigma^m(\mathrm{sop}(h^2))\right) \subseteq \sigma^{-n}(\sigma^m(U)).$$

Como $\sigma^{-n}(\sigma^m(U))$ es disjunto de U, también es disjunto del soporte de h y por lo tanto $h\alpha^n(\mathcal{L}^m(h^2)) = 0$. □

Presentamos a continuación uno de los principales resultados de esta sección.

Teorema 6.3.3. *Sea (X, σ) un sistema dinámico clásico topológicamente libre. Entonces todo ideal no trivial de $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ tiene intersección no trivial con $C(X)$. Además, dados una C^*-álgebra B y un homomorfismo $\pi : C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} \to B$ que es inyectivo en $C(X)$, se tiene que π es inyectivo en todo $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $\pi : A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} \to B$ una representación fiel en $C(X)$.

Afirmación: $\|G(a)\| \leq \|\pi(a)\|$ ***para todo*** $a \geq 0$ ***en*** $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$**.**

Basta demostrar la afirmación para elementos positivos de la forma $a = \sum_{i=1}^{t} a_i S^{n_1} S^{*m_i} b_i$ para ciertos a_i, b_i en A y n_i, m_i en $\mathbb{N}$, ya que el conjunto de los estos elementos es denso en el cono positivo de $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$. Podemos asumir también que $n_i = m_i$ para $i = 1, \ldots, s$ y que $n_i \neq m_i$ para $i = s+1, \ldots, t$.

Para cada $i = s+1, \ldots, t$, el conjunto $\{x \in X : \sigma^{n_i}(x) \neq \sigma^{m_i}(x)\}$ es abierto y denso en X, y por lo tanto también lo es su intersección. Así, fijado un número real ρ con $0 < \rho < 1$, existe x_0 en X tal que $G(a)(x_0) > \rho\|G(a)\|$ y $\sigma^{n_i}(x_0) \neq \sigma^{m_i}(x_0)$ para todo $i = s+1, \ldots, t$.

Usando el lema anterior, para cada $i = s+1, \ldots, t$ obtenemos h_i en $C(X)$ con $0 \leq h_i \leq 1, h_i(x_0) = 1$ y $h_i S^{n_i} S^{*m_i} h_i = 0$. Definiendo $h = h_{s+1} \cdots h_t$ tenemos que

$$hah = \sum_{i=1}^{t} a_i h S^{n_i} S^{*m_i} h b_i = \sum_{i=1}^{s} a_i h S^{n_i} S^{*n_i} h b_i = hP(a)h,$$

donde $P : A \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} \to \mathcal{U}$ es la esperanza condicional sobre los puntos fijos de la acción canónica γ. Si $n = \text{máx}\{n_1, \ldots, n_s\}$, entonces $P(a)$ es un elemento de K_n por la parte (2) del lema 6.2.6. Por el corolario 6.2.10, podemos tomar un conjunto finito $\{v_1, \ldots, v_p\}$ en $C(X)$ tal que $\sum_{i=1}^{p} v_i v_i^* = 1$ y

$$G(a) = G(P(a)) = \sum_{i=1}^{p} v_i P(a) v_i^*.$$

Por lo tanto,

$$\|hG(a)h\| = \|\pi(hG(a)h)\| = \left\| \sum_{i=1}^{p} \pi\big(hv_i P(a) v_i^* h\big) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{p} \pi\big(v_i hah v_i^*\big) \right\| \leq \|\pi(a)\|.$$

Como además

$$\|hG(a)h\| \geq h(x_0)G(a)(x_0)h(x_0) = G(a)(x_0) > \rho\|G(a)\|,$$

y ρ es arbitrario, concluimos que $\|G(a)\| \leq \|hG(a)h\| \leq \|\pi(a)\|$, como queríamos.

Sea ahora a en $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ tal que $\pi(a) = 0$. Entonces para todo b en $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ tenemos

$$\|G(b^* a^* ab)\| \leq \|\pi(b^* a^* ab)\| = 0,$$

y por lo tanto $G(b^* a^* ab) = 0$. Teniendo en cuenta la proposición 6.2.13 concluimos que $a^* a = 0$, y así $a = 0$. Por lo tanto, π es fiel en todo $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$.

Probemos la afirmación acerca de los ideales en el producto cruzado. Sean J un ideal no trivial de $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ y $\pi : C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} \to \frac{C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}}{J}$ el mapa cociente. Entonces π no puede ser fiel en $C(X)$ pues de lo contrario sería fiel en todo $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ por lo que acabamos de probar. Por lo tanto, debe ser $J \cap C(X) \neq \emptyset$. $\square$

Enunciamos a continuación un teorema que sirve como una satisfactoria generalización del teorema 6.0.3. Su demostración es extensa y por ello la omitimos. Los detalles de la misma se encuentran en [6].

Teorema 6.3.4. *(Teorema 6 de [6]). Sea (X, σ) un sistema dinámico clásico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *(X, σ) es topológicamente libre.*
2. *Todo ideal no trivial de $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ tiene intersección no trivial con $C(X)$.*
3. *Toda representación de $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ que es fiel en $C(X)$ es fiel en todo $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$.*
4. *$C(X)$ es una subálgebra abeliana maximal de $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$.*

Observación 6.3.5. Es claro que las afirmaciones (2) y (3) son equivalentes. Por otro lado, el teorema 6.3.3 muestra que la primera afirmación implica la segunda. Las restantes implicancias fueron demostradas por Carlsen y Silvestrov en [6].

Cerramos esta sección con un resultado que se aproxima a una descripción de los ideales de $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ cuando el sistema dinámico clásico (X, σ) es topológicamente libre.

Probaremos que en el caso en que el sistema dinámico sea topológicamente libre, los ideales del producto cruzado generado por él están parametrizados por ciertos subconjuntos abiertos de X: los abiertos *invariantes* por σ. Comenzamos definiendo este concepto y analizando la definición.

Definición 6.3.6. Dados x e y en X, decimos que son *trayectoriamente equivalentes*, y escribimos $x \sim y$, si existen n, m en $\mathbb{N}$ tales que $\sigma^n(x) = \sigma^m(y)$. Además, dado un subconjunto $Y \subseteq X$, decimos que Y es *invariante* si las condiciones $y \in Y$ y $x \sim y$ implican que x es un elemento de Y.

Finalmente, decimos que el sistema dinámico generado por σ es *irreducible* si no existe ningún cerrado (equivalentemente, abierto) invariante distinto de X y $\emptyset$.

Proposición 6.3.7. *Sea Y un subconjunto de X. Entonces Y es invariante si y sólo si $\sigma^{-1}(Y) = Y$.*

Demostración. Supongamos que Y es invariante, y sean y en Y y x en X tal que $\sigma(x) = y$. Entonces claramente $x \sim y$, de modo que x pertenece a Y y así $\sigma^{-1}(Y) \subseteq Y$. Recíprocamente, si y es un elemento de Y, entonces también es claro que $y \sim \sigma(y)$, de modo que $\sigma(y) \in Y$ y por lo tanto $Y \subseteq \sigma^{-1}(Y)$.

Supongamos ahora que $\sigma^{-1}(Y) = Y$, y veamos que Y es invariante. Observemos que como σ es sobreyectivo, también vale que $Y = \sigma(Y)$. Sean x en X y y en Y tales que $x \sim y$. Sean n, m en $\mathbb{N}$ tales que $\sigma^n(x) = \sigma^m(y)$. Como $y' := \sigma^m(y)$ está en Y y además $\sigma^n(x) \sim y'$, obtenemos que $\sigma^n(x)$ está también en Y. Por último, $x \in \sigma^{-n}(\sigma^n(x)) \subseteq \sigma^{-n}(Y) = Y$, por lo que Y es invariante. $\square$

El siguiente es el resultado anunciado.

Teorema 6.3.8. *Supongamos que el sistema dinámico (X, σ) es topológicamente libre. Entonces para cada abierto invariante U de X, existe un ideal J_U de $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ tal que $J_U \cap C(X) = C_0(U)$.*

Recíprocamente, sea J un ideal de $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$. Entonces $C(X) \cap J = C_0(U_J)$ para algún abierto invariante U_J de X.

También se tiene que $U_{J_U} = U$: la primera correspondencia es inversa a derecha de la segunda.

Por último, si el sistema dinámico (X, σ) es topológicamente libre en cada cerrado invariante, entonces también tenemos que $J_{U_J} = J$ para todo ideal J de $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$. En particular, en este caso los ideales del producto cruzado $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ están parametrizados por los abiertos invariantes del sistema (X, σ).

Explícitamente, si $U \subseteq X$ es invariante, el ideal J que tiene asociado es el ideal generado por $C_0(U)$ en $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ y satisface $J \cap C(X) = C_0(U)$ y $\frac{C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}}{J} \cong C(X \backslash U) \rtimes_{\overline{\alpha},\overline{\mathcal{L}}} \mathbb{N}$.

Demostración. Sea U un abierto de X. Probemos primero que U **es invariante si y sólo si $I = C_0(U)$ satisface $\alpha(I) \subseteq I$ y $\mathcal{L}(I) \subseteq I$.**

Supongamos que U es invariante, es decir, $\sigma^{-1}(U) = U$. Veamos que $I = C_0(U)$ es invariante por α. Para ello alcanza con ver que, si f es una función de I, entonces el soporte de $\alpha(f) = f \circ \sigma$ está contenido en U. Ahora, si $x \in \operatorname{sop} f \circ \sigma$, entonces $\sigma(x) \in \operatorname{sop} f \subseteq U$, es decir, $x \in \sigma^{-1}(U) = U$. Por lo tanto $\operatorname{sop}(\alpha(f)) \subseteq U$ y $\alpha(f)$ está en $C_0(U)$.

Veamos ahora que I es invariante por $\mathcal{L}$. Si f está en I, entonces el soporte de $\mathcal{L}(f) = \frac{1}{|\sigma^{-1}(x)|} \sum_{\sigma(y)=x} f(y)$ está contenido en $\sigma^{-1}(U) = U$, de modo que $\mathcal{L}(f)$ es un elemento de I.

Supongamos que $C_0(U)$ es invariante por α y $\mathcal{L}$, y veamos que $\sigma^{-1}(U) = U$. Dado y en $\sigma^{-1}(U)$, sean $x = \sigma(y) \in U$ y f en I tal que $f(x) = 1$. Dado que $\alpha(f) \in I$ y $\alpha(f)(y) = f(x) = 1$, se tiene que $y \in U$, y por lo tanto $\sigma^{-1}(U) \subseteq U$. Recíprocamente, dado x en U, se tiene que el conjunto $\sigma^{-1}(\sigma(x))$ es finito y contiene a x, de modo que existe f en $C_0(U) = I$ que satisface $f(x) = 1$ y $f(y) = 0$ para todo y distinto de x en $\sigma^{-1}(\sigma(x))$. Como I es invariante por $\mathcal{L}$, se tiene que $\mathcal{L}(f) \in I$ y como $\mathcal{L}(f)(\sigma(x)) = \frac{1}{|\sigma^{-1}(\sigma(x))|}\sum_{\sigma(y)=\sigma(x)} f(y) = \frac{1}{|\sigma^{-1}(\sigma(x))|}$, se tiene que $\sigma(x) \in U$, esto es, $U \subseteq \sigma^{-1}(U)$, de donde concluimos que $\sigma^{-1}(U) = U$.

La primera afirmación del enunciado se debe a lo recién demostrado y a la proposición 6.1.10: todo abierto invariante induce un ideal invariante y éste se dilata a un ideal del producto cruzado.

Veamos la segunda afirmación. Si J es un ideal de $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$, entonces $I = C(X) \cap J$ es un ideal de $C(X)$, y vía la transformada de Gelfand, existe un abierto U de X tal que I es isomorfo a $C_0(U)$. Para ver que U es invariante, mostraremos que I es invariante por α y por $\mathcal{L}$.

Sea f en I. Por un lado, es $\mathcal{L}(f) = S^*fS \in J$ pues J es un ideal. Como $\mathcal{L}(f) \in C(X)$, se tiene que $\mathcal{L}(f)$ es un elemento de I, esto es, $\mathcal{L}(I) \subseteq I$. Finalmente,

$$\alpha(f) = \alpha(f)1 = \alpha(f)\sum_{i=1}^{m} u_i SS^* u_i^* = \sum_{i=1}^{m} u_i \alpha(f) SS^* u_i^* = \sum_{i=1}^{m} u_i SfS^* u_i^*,$$

que es un elemento de J por ser éste un ideal. Como $\alpha(f) \in C(X)$, concluimos que también $\alpha(f) \in I$, y por lo tanto $\alpha(I) \subseteq I$.

Es inmediato verificar que $U_{J_U} = U$ para todo abierto invariante U en X, así que demostremos la última afirmación.

Supongamos que el sistema (X,σ) es topológicamente libre en cada cerrado invariante de X. Para demostrar que $J_{U_J} = J$ para cada ideal J de $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$, basta con demostrar que si U es un abierto de X invariante por σ, y K es un ideal de $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ tal que $K \cap C(X) = C_0(U)$, entonces $K = J_U$. En efecto, supongamos que tuviéramos probado lo anterior, y sea J un ideal de $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$. Tomando $U = U_J$ obtenemos que $J_{U_J} = J$.

Afirmación: ***Sean $U \subseteq X, K$ y $J = J_U$ como en el párrafo anterior. Entonces***

$$\frac{C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}}{K} \subseteq \frac{C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}}{J}.$$

Tenemos que $\frac{C(X)}{C_0(U)} \cong C(X \setminus U) \subseteq \frac{C(X)\rtimes_{\alpha,\mathcal{L}}\mathbb{N}}{K}$, y si $\pi_K : C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} \to \frac{C(X)\rtimes_{\alpha,\mathcal{L}}\mathbb{N}}{K}$ es el mapa cociente, entonces el par $\left(id_{C(X\setminus U)}, S_K\right)$ es una representación Toeplitz-covariante de $(C(X \setminus U), \overline{\alpha}, \overline{\mathcal{L}})$ en $\frac{C(X)\rtimes_{\alpha,\mathcal{L}}\mathbb{N}}{K}$, siendo $S_K = \pi_K(S)$. Esta representación induce un mapa $\varphi : \mathcal{T}(C(X \setminus U), \overline{\alpha}, \overline{\mathcal{L}}) \to \frac{C(X)\rtimes_{\alpha,\mathcal{L}}\mathbb{N}}{K}$ que satisface $\varphi(f) = f$ para toda f en $C(X \setminus U)$ y $\varphi(\overline{S}) = S_K$, por lo que además es sobreyectivo.

Si (a,k) es una redundancia en $\mathcal{T}(C(X \setminus U), \overline{\alpha}, \overline{\mathcal{L}})$, esto es, $ab\overline{S} = kb\overline{S}$ para todo b en $C(X \setminus U)$, entonces aplicando φ obtenemos que $abS_K = \varphi(k)bS_K$. Por lo tanto, $(a, \varphi(k))$ es una redundancia en $\frac{C(X)\rtimes_{\alpha,\mathcal{L}}\mathbb{N}}{K}$. Como el producto cruzado $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ tiene cocientadas las redundancias, resulta que $a = \varphi(k)$ y por lo tanto φ induce un homomorfismo

$$\Phi : C(X \setminus U) \rtimes_{\overline{\alpha},\overline{\mathcal{L}}} \mathbb{N} \cong \frac{C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}}{J} \to \frac{C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}}{K}$$

que también es sobreyectivo.

El mapa Φ, cuando visto como mapa $\frac{C(X)\rtimes_{\alpha,\mathcal{L}}\mathbb{N}}{J} \to \frac{C(X)\rtimes_{\alpha,\mathcal{L}}\mathbb{N}}{K}$, satisface $\Phi([w]_J) = [w]_K$. Esto puede deducirse de la forma concreta que tienen los mapas involucrados en la construcción de Φ. Por ejemplo, si $\iota_U : C(X \setminus U) \to C(X)$ es la inclusión, entonces el isomorfismo $C(X \setminus U) \rtimes_{\overline{\alpha},\overline{\mathcal{L}}} \mathbb{N} \cong \frac{C(X)\rtimes_{\alpha,\mathcal{L}}\mathbb{N}}{J}$ satisface $f \mapsto [\iota_U(f)]_J$ y $\overline{S} \mapsto S_J$, para f en $C(X \setminus U)$.

En consecuencia, si L es el núcleo de Φ, entonces L es un ideal de $\frac{C(X)\rtimes_{\alpha,\mathcal{L}}\mathbb{N}}{J}$ que satisface $\frac{\frac{C(X)\rtimes_{\alpha,\mathcal{L}}\mathbb{N}}{J}}{L} \cong \frac{C(X)\rtimes_{\alpha,\mathcal{L}}\mathbb{N}}{K}$. Debe ser $L \cong \frac{P}{J}$ para un cierto ideal P de $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ que contiene a J, y así

$$\frac{C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}}{K} \cong \frac{\frac{C(X)\rtimes_{\alpha,\mathcal{L}}\mathbb{N}}{J}}{L} \cong \frac{\frac{C(X)\rtimes_{\alpha,\mathcal{L}}\mathbb{N}}{J}}{\frac{P}{J}} \cong \frac{C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}}{P} \subseteq \frac{C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}}{J}.$$

Para probar la afirmación sólo resta observar que los isomorfismos citados son los canónicos y que el mapa que resulta de su composición es $[w]_K \mapsto [w]_P$, por lo que la última inclusión vale también para $\frac{C(X)\rtimes_{\alpha,\mathcal{L}}\mathbb{N}}{K}$.

Lo que resta de la prueba consistirá en reducirse al caso en que $K \subseteq J$ o $J \subseteq K$, y luego combinar los siguientes argumentos.

Argumento 1. Supongamos que $K \subseteq J$. Entonces

$$\frac{C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}}{K} \cong \frac{C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}}{J} \cong C(X \setminus U) \rtimes_{\overline{\alpha},\overline{\mathcal{L}}} \mathbb{N}.$$

Como $X \setminus U$ es un cerrado de X invariante por σ, el sistema $(X \setminus U, \sigma_{X\setminus U})$ es topológicamente libre. Además, J/K es un ideal de $C(X \setminus U) \rtimes_{\overline{\alpha},\overline{\mathcal{L}}} \mathbb{N}$ que intersecta trivialmente a $C(X \setminus U)$. El teorema 6.3.3 asegura que debe ser $J/K = \{0\}$, esto es, $J = K$.

Argumento 2. Supongamos que $J \subseteq K$. Entonces K/J es un ideal de $\frac{C(X)\rtimes_{\alpha,\mathcal{L}}\mathbb{N}}{J} \cong C(X \setminus U) \rtimes_{\overline{\alpha},\overline{\mathcal{L}}} \mathbb{N}$, que nuevamente intersecta trivialmente a $C(X \setminus U)$. El teorema 6.3.3 asegura otra vez que $K = J$.

Volvamos al caso general. Sea $K' = K \cap J$. Es claro que K' es un ideal de $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$, también que $K' \cap C(X) = C_0(U)$ y que $K' \subseteq J$. Ahora, el argumento 1 asegura que debe ser $K' = J$, es decir, que $J \subseteq K$. Finalmente, el argumento 2 permite concluir que $J = K$. $\square$

Observación 6.3.9. Aún cuando el sistema dinámico (X, σ) no sea topológicamente libre, cada subconjunto abierto propio de X que sea invariante por σ tendrá asociado un ideal no trivial del producto cruzado.

6.4. Irreducibilidad y simplicidad.

Como antes, fijamos un sistema clásico (X, σ) y el operador de transferencia $\mathcal{L}$ antes descrito. Nuestro objetivo en esta sección será encontrar una condición en el mapa σ que sea equivalente a la simplicidad del producto cruzado $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$. Esta condición es precisamente la irreducibilidad del sistema dinámico, y comenzamos por definir esta noción.

Definición 6.4.1. Decimos que el sistema dinámico generado por σ es *irreducible* si no existe ningún cerrado (equivalentemente, abierto) invariante distinto de X y $\emptyset$.

Proposición 6.4.2. *Sea Y un subconjunto de X. Entonces Y es invariante si y sólo si $\sigma^{-1}(Y) = Y$.*

Demostración. Supongamos que Y es invariante, y sean y en Y y x es X tal que $\sigma(x) = y$. Entonces claramente $x \sim y$, de modo que x pertenece a Y y así $\sigma^{-1}(Y) \subseteq Y$. Recíprocamente, si y es un elemento de Y, entonces también es claro que $y \sim \sigma(y)$, de modo que $\sigma(y) \in Y$ y por lo tanto $Y \subseteq \sigma^{-1}(Y)$.

Supongamos ahora que $\sigma^{-1}(Y) = Y$, y veamos que Y es invariante. Observemos que como σ es sobreyectivo, también vale que $Y = \sigma(Y)$. Sean x en X y y en Y tales que $x \sim y$. Sean n, m en $\mathbb{N}$ tales que $\sigma^n(x) = \sigma^m(y)$. Como $y' := \sigma^m(y)$ está en Y y además $\sigma^n(x) \sim y'$, obtenemos que $\sigma^n(x)$ está también en Y. Por último, $x \in \sigma^{-n}(\sigma^n(x)) \subseteq \sigma^{-n}(Y) = Y$, por lo que Y es invariante. □

Proposición 6.4.3. *Supongamos que σ es irreducible. Entonces ocurre una y sólo una de las siguientes situaciones*

1. *σ es topológicamente libre, o*

2. *X es finito y σ es una permutación cíclica de X.*

Demostración. Comencemos observando que las condiciones anteriores son incompatibles. Si X es finito y σ es una permutación cíclica en él, entonces denotando por n al cardinal X, concluimos que $\sigma^n = id_X$. En este caso $\{x \in X : \sigma^n(x) = \sigma^{2n}(x)\} = X$, de modo que σ no es topológicamente libre.

Supongamos que σ es irreducible y no topológicamente libre. Sean n, m en $\mathbb{N}$ distintos, y U un abierto no vacío de X tales que $\sigma^n(u) = \sigma^m(u)$ para todo u en U. Como σ es abierta, $U' := \bigcup_{k,l \in \mathbb{N}} \sigma^{-k}(\sigma^l(U))$ es un subconjunto abierto e invariante. Como no es vacío y σ es irreducible, U' debe coincidir con X, y así este último admite un cubrimiento finito de la forma $\{\sigma^{-k_i}(\sigma^{l_i}(U))\}_{i=1}^p$.

Dado x en X, sea $i \in \{1, \ldots, p\}$ tal que $x \in \sigma^{-k_i}(\sigma^{l_i}(U))$. Entonces existe u en U tal que $\sigma^{k_i}(x) = \sigma^{l_i}(u)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sigma^{n+k_i}(x) &= \sigma^n(\sigma^{k_i}(x)) = \sigma^n(\sigma^{l_i}(u)) = \sigma^{l_i}(\sigma^n(u)) = \sigma^{l_i}(\sigma^m(u)) \\ &= \sigma^m(\sigma^{l_i}(u)) = \sigma^m(\sigma^{k_i}(x)) = \sigma^{m+k_i}(x). \end{aligned}$$

Si ahora k es el máximo de $\{k_1, \ldots, k_p\}$, entonces tenemos que $\sigma^{n+k}(x) = \sigma^{m+k}(x)$ para todo x en X. Podemos suponer que $n > m$, y así si $r = m + k$ y $s = n - m$, obtenemos que

$\sigma^{s+r}(x) = \sigma^r(x)$ para todo x en X. Como σ es sobreyectivo, esto implica que $\sigma^s = id_X$.

Verifiquemos que X es finito y que σ es una permutación cíclica de él. Dado z en X cualquiera, el conjunto $\{z, \sigma(z), \ldots, \sigma^{s-1}(z)\}$ es cerrado e invariante, por lo que debe coincidir con X, que resulta finito, y en consecuencia σ es una permutación de él. Para demostrar que es cíclica, basta observar que si σ tuviera un ciclo propio, tal ciclo formaría un conjunto cerrado e invariante, lo cual es absurdo. □

Estamos ahora en condiciones de presentar el principal resultado de esta sección.

Teorema 6.4.4. *Supongamos que X es infinito. Entonces el producto cruzado $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ es simple si y sólo si σ es irreducible.*

Demostración. Supongamos que el producto cruzado $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ es simple. Entonces X no puede contener subconjuntos abiertos (equivalentemente, cerrados) invariantes no triviales, pues un tal conjunto tendría asociado un ideal no trivial del producto cruzado, de acuerdo al teorema 6.3.8 y la observación 6.3.9.

Recíprocamente, supongamos que (X, σ) es irreducible. Como el espacio X es infinito, la proposición 6.4.3 implica que (X, σ) es topológicamente libre. Si J es un ideal de $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$, la proposición 6.3.8 implica que existe un abierto invariante de X, que denotamos por U, tal que $J \cap C(X) = C_0(U)$. Como σ es irreducible, debe ser $U = \emptyset$ o bien $U = X$.

En el primer caso, obtenemos que $\{0\} = C_0(\emptyset) = J \cap C(X)$, y por el teorema 6.3.3, es $J = \{0\}$. En el segundo caso, $C_0(U) = C(X) \subseteq J$, y como la unidad del producto cruzado está en $C(X)$, es $J = C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$. Por lo tanto, esta última álgebra es simple. □

La siguiente observación explica brevemente el comportamiento de $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ cuando estamos frente al segundo caso descrito en la proposición 6.4.3. Los detalles de este ejemplo se encuentran en [21].

Observación 6.4.5. Supongamos que X es finito y que σ es irreducible. Entonces σ es un homeomorfismo de X y $\mathcal{L} = \alpha^{-1}$. Además, si n es la cantidad de elementos de X y $\beta : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ es la transformación lineal que permuta cíclicamente los elementos de la base, entonces $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N} \cong \mathbb{C}^n \rtimes_\beta \mathbb{Z} \cong M_n(C(S^1)) \cong M_n(\mathbb{C}) \otimes C(S^1)$. Mostramos a continuación la construcción de un isomorfismo que justifica la segunda igualdad.

Denotamos por $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a la base canónica de $\mathbb{C}^n$; por $e_{j,k}$ al elemento de $M_n(C(S^1))$ que tiene a la función 1 en la coordenada (j,k) y ceros fuera de él; y por v al unitario de $M_n(C(S^1))$ dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & id_{C(S^1)} \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puede probarse que existe un homomorfismo $\varphi : \mathbb{C}^n \rtimes_\beta \mathbb{Z} \to M_n(C(S^1))$ que satisface $\varphi(e_k) = e_{k,k}$ (determinando el comportamiento de φ en la copia de $\mathbb{C}^n$ en el producto cruzado), y $\varphi(u) = v$, donde u es el unitario que junto con $\mathbb{C}^n$ genera $\mathbb{C}^n \rtimes_\beta \mathbb{Z}$. Tal homomorfismo φ es de hecho un isomorfismo.

Cerramos esta disgresión observando que este producto cruzado no es simple: en efecto, $M_n(C_0(S^1 \setminus \{1\}))$ es un ideal propio de él. Esto termina la discusión sobre la relación entre simplicidad de $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ e irreducibilidad del sistema dinámico.

6.5. Transitividad y primalidad.

Cerramos este capítulo con una última comparación entre una propiedad de la dinámica del sistema (X, σ) y otra algebraica del producto cruzado que él genera. Concretamente, nos concentraremos en la relación existente entre transitividad de (X, σ) y la primalidad de $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$.

Definición 6.5.1. Decimos que un sistema dinámico clásico (X, σ) es *transitivo* si para todo par de abiertos no vacíos $U, V \subseteq X$, existen n y m en $\mathbb{N}$ tales que $\sigma^n(U) \cap \sigma^m(V) \neq \emptyset$.

Proposición 6.5.2. *Para el sistema dinámico clásico (X, σ), las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, σ) es transitivo.*

2. *Para todo par de abiertos invariantes no vacíos U y V, se tiene que $U \cap V \neq \emptyset$.*

Demostración. Veamos que la primera afirmación implica la segunda. Como (X, σ) es transitivo, existen n y m en $\mathbb{N}$ tales ques $\sigma^n(U) \cap \sigma^m(V) \neq \emptyset$. Como U y V son invariantes, $\sigma^n(U) = U$ y $\sigma^m(V) = V$, de donde obtenemos (2).

Recíprocamente, sean U y V abiertos no vacíos de X. Como σ es un homeomorfismo local, es también abierta y así $U_\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \sigma^n(U)$ y $V_\infty := \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \sigma^m(V)$ son abiertos invariantes no vacíos. Por lo tanto, $U_\infty \cap V_\infty \neq \emptyset$, es decir, existen n y m en $\mathbb{Z}$ tales que $W := \sigma^n(U) \cap \sigma^m(V) \neq \emptyset$. Si n y m son positivos, concluimos que (X, σ) es transitivo.

Supongamos que $n < 0 \leq m$ Así,

$$\sigma^{-n}(W) = \sigma^{-n}(\sigma^n(U)) \cap \sigma^{-n}(\sigma^m(V)) = U \cap \sigma^{-n+m}(V)$$

es claramente no vacío, de donde se deduce que (X, σ) es transitivo.

Por último, si $n \leq m \leq 0$,

$$\sigma^{-n}(W) = \sigma^{-n}(\sigma^n(U)) \cap \sigma^{-n+m}(\sigma^{-m}((\sigma^m(V))) = U \cap \sigma^{-n+m}(V),$$

también es no vacío, y de nuevo (X, σ) es transitivo. □

Recordemos que una C^*-álgebra B se dice *prima* si $\{0\}$ es un ideal primo de B. Equivalentemente, B es prima si dados I y J ideales de B tales que $I \cdot J = I \cap J = \{0\}$, se tiene que $I = \{0\}$ o $J = \{0\}$. En otras palabras, dos ideales no triviales tienen intersección no trivial en una C^*-álgebra prima.

Se tiene el siguiente resultado.

Teorema 6.5.3. *Supongamos que el sistema dinámico clásico (X, σ) es topológicamente libre. Entonces (X, σ) es transitivo si y sólo si $C(X) \rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ es una C^*-álgebra prima.*

Demostración. Veamos la implicancia "sólo si". Sean I y J ideales no triviales de $C(X)\rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$. Como (X,σ) es topológicamente libre, $I\cap C(X)$ y $J\cap C(X)$ son ideales no triviales de $C(X)$, y por lo tanto pueden identificarse a través de la transformada de Gelfand con $C_0(U)$ y $C_0(V)$, donde U y V son dos abiertos invariantes no vacíos, por el teorema 6.3.8. Como (X,σ) es transitivo, la proposición anterior implica que $U\cap V\neq\emptyset$, de modo que $C_0(U)\cap C_0(V)\neq\{0\}$, y por lo tanto $I\cap J\neq\{0\}$.

Recíprocamente, sean U y V dos abiertos invariantes; veamos que no pueden ser disjuntos. Sean I y J dos ideales de $C(X)\rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ tales que $I\cap C(X)=C_0(U)$ y $J\cap C(X)=C_0(V)$. Como $C(X)\rtimes_{\alpha,\mathcal{L}} \mathbb{N}$ es prima, debe ser $K:=I\cap J\neq\{0\}$. Como (X,σ) es topológicamente libre,

$$\{0\}\neq K\cap C(X)=(I\cap C(X))\cap(J\cap C(X))=C_0(U)\cap C_0(V),$$

por lo que U y V no pueden ser disjuntos. $\square$

Bibliografía

[1] Mauricio Achigar. *Álgebras de Cuntz-Pimsner y productos cruzados por C^*-bimódulos.* Tesis de Maestría. Facultad de Ciencias, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay. 2005.

[2] Sriwulan Adji, Marcelo Laca, May Nilsen e Iain Raeburn. *Crossed products by semigroups of endomorphisms and the Toeplitz algebras of ordered groups.* Proceedings of the American Mathematical Society, 122, 1133-1141. 1994.

[3] Bruce Blackadar. *Shape theory for C^*-algebras.* Mathematica Scandinavica. 56, 249-275. 1985.

[4] Nathan Brownlowe e Iain Raeburn. *Exel's crossed product and relative Cuntz-Pimsner algebras.* Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophy Society, 141, 497-508. 2006.

[5] Nathan Brownlowe, Iain Raeburn y Sean Vittadello. *Exel's crossed product for nonunital C^*-algebras.* Preprint, arXiv:math.OA/0908.2671v1. 2009.

[6] Toke Meier Carlsen y Sergei Silvestrov. *On the Exel crossed product of topological covering maps.* Preprint, arXiv:math.OA/0811.0056v1. 2008.

[7] Joachim Cuntz. *Simple C^*-algebras generated by isometries.* Communications in Mathematical Physics. Vol. 57, 2. 173-185. 1977.

[8] Kenneth Davidson. *C^*-algebras by example.* Fields Institute Monographs, AMS. 1996.

[9] Ruy Exel. *A new look to the crossed product of a C^*-algebra by an endomorphism.* Ergodic Theory and Dynamical Systems, 23 (6), 1733-1756. 2003.

[10] Ruy Exel. *Crossed products by finite index endomorphisms and KMS states.* Journal of Functional Analysis, 199 (1), 153-188. 2003.

[11] Ruy Exel y A. Vershik. *C^*-algebras of irreversible dynamical systems.* Canadian Journal of Mathematics, 58 (1), 39-63. 2006.

[12] Neal Fowler y Iain Raeburn. *The Toeplitz algebra of a Hilbert bimodule.* Journal of Functional Analysis, 158, 389-457. 1998.

[13] Christopher Lance. *Hilbert C^*-modules: A toolkit for operator algebraists.* London Mathematical Society. Lecture Notes Series, vol. 210, Cambridge University Press, Cambridge. 1994.

[14] Paul Muhly y Baruch Solel. *Tensor algebras over C^*-correspondences: representations, dilations, and C^*-envelopes.* Journal of Functional Analysis, 158, 389-457. 1998.

[15] Gerard Murphy. *Crossed products of C^*-algebras by endomorphisms.* Integral Equations Operator Theory 24, no. 3, 298–319. 1996.

[16] Michael Pimsner. *A class of C^*-algebras generalizing both Cuntz-Krieger algebras and crossed products by $\mathbb{Z}$.* Fields Institute Communications. 12, 189-212. 1997.

[17] John Quigg and Iain Raeburn. *Characterizations of Crossed Products by Partial Actions.* Journal of Operator Theory 37, 311-340. 1997.

[18] Iain Raeburn. *Graph Algebras.* AMS Providence, Rhode Island. 2004.

[19] Jun Tomiyama. *The interplay between Topological Dynamics and Theory of C^*-algebras.* Lecture Notes Series vol. 2, Department of Mathematics, Seoul National University. 1992.

[20] Yasuo Watatani. *Index for C^*-subalgebras.* Memoires of the American Society. 424. 1990.

[21] Dana Williams. *Crossed products of C^*-algebras.* Mathematical Surveys and Monographs, 134, AMS. 2007.